Examen (session principale – 16/12/2024)

Durée 2h (+ tiers temps). Tout document et objet électronique sont interdits.

Exercice 1 (2/1=3 pts)
Déterminer les racines du polynôme
$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12.$$

Une racine évidente est $\boxed{x = 2}$, puisque

$$P(2) = 2^3 - 7 \times 2^2 + 16 \times 2 - 12 = 8 - 28 + 32 - 12 = 40 - 40 = 0.$$

On peut donc factoriser P par $(x - 2)$. On écrit

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(x - 2) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.$$

Par comparaison des coefficients, on voit facilement que $a = 1$ et $c = 6$, ainsi il reste juste à déterminer b. En regardant le coefficient du terme x^2, on doit avoir $b - 2 = -7$, et donc $b = -5$. Ainsi

$$P(x) = (x^2 - 5x + 6)(x - 2).$$

Il reste à déterminer les racines du facteur $x^2 - 5x + 6$. Son discriminant est $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Ainsi, les racines sont
$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

On en conclut que <u>les racines de P sont 2 (avec multiplicité 2) et 3</u>, ainsi

$$P(x) = (x - 2)^2(x - 3)$$

Exercice 2 (1/1=2 pts)
Représenter graphiquement (et séparément) les ensembles suivants.

1. $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x^2 - 1|\}$.
2. $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x - 1, |x| \leq 1\}$.

Exercice 3 (1/0,5/1/1/0,5/1/2=7 pts)
On considère la fonction
$$f(x) = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, en justifiant la réponse.
   On écrit la fonction f comme u/v, où $u(x) = 2e^{\sqrt{x}}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a
   $$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v \cap \{x \in \mathcal{D}_v : v(x) \neq 0\}.$$
   La fonction $\sqrt{x}$ est définie sur $\{x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$. Ainsi $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}_+$. Comme la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, la composition $e^{\sqrt{x}}$ est définie sur $\{x \geq 0\}$. On en déduit $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}_+$ aussi. Puisque $v \neq 0$ si et seulement si $x \neq 0$, on a finalement que f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f = \{x > 0\} = \mathbb{R}_+^*.}$
2. Déterminer si $\mathcal{D}_f$ est un convexe, en justifiant la réponse.
   Le domaine $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, est par conséquent il est <u>convexe</u>.

3. Calculer la dérivée première de f.
   On écrit à nouveau $f = u/v$ comme plus haut. On a $u' = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{x} = \boxed{e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \right).}$$

4. Étudier le signe de f' et représenter le tableau de variation de f.
   On écrit

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \right) = e^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^{3/2}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{3/2}} \left(\sqrt{x} - 1 \right).$$

   Puisque sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ on a $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^{3/2}} > 0$, le signe de f' est déterminé par le signe du facteur $\sqrt{x} - 1$. On a $\sqrt{x} - 1 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$, et on en déduit le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

5. Déterminer la nature des éventuels points critiques de f (point de maximum local, de minimum local, ou d'inflexion).
   Il y a un seul point critique, $x = 1$, qui correspond à un point de minimum local.
6. Calculer la dérivée seconde de f.
   On reprend l'expression

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \right),$$

   que l'on écrit sous la forme $f' = uv$ avec $u = e^{\sqrt{x}}$ et $v = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{3/2}}$. On a

$$u' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \quad v' = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^{5/2}}$$

   et donc

$$\begin{aligned} f''(x) = uv' + u'v &= \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^{5/2}} + \frac{1}{2x^{3/2}} - \frac{1}{2x^2} \right) e^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{3}{2x^{5/2}} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x^{3/2}} \right) e^{\sqrt{x}} \\ &= \boxed{\left(3 - 3\sqrt{x} + x \right) \frac{e^{\sqrt{x}}}{2x^{5/2}}.} \end{aligned}$$

7. Déterminer si la fonction f est convexe sur son domaine de définition.
   On reprend l'expression

$$f''(x) = \left(3 - 3\sqrt{x} + x \right) \frac{e^{\sqrt{x}}}{2x^{5/2}}.$$

   Le facteur $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2x^{5/2}}$ est toujours positif pour $x \in \mathcal{D}_f = \mathbf{R}_+^*$, il faut donc regarder le signe du facteur $3 - 3\sqrt{x} + x$. En écrivant $t = \sqrt{x}$, on écrit cette expression sous la forme $t^2 - 3t + 3$. Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = -3 < 0$, ainsi l'expression $t^2 - 3t + 3$ est toujours positive. On en déduit que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, et donc f est convexe.

Exercice 4 (0,5/1/2/1=4,5 pts)
On considère la fonction
$$u(x,y) = 2xy - 2x^2 - 3y^2 - 2x + 2y^3.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u.
   La fonction est polynomiale en deux variables, et donc $\boxed{\mathcal{D}_u = \mathbb{R}^2.}$
2. Calculer les dérivées partielles
$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$
   On calcule
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 2y - 4x - 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 6y + 6y^2.}$$
3. Déterminer les éventuels points critiques de u.
   On doit résoudre le système
$$\begin{cases} 2y - 4x - 2 = 0 \\ 2x - 6y + 6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ 2x - 6y + 6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y - 1 \\ (y-1) - 6y + 6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y - 1 \\ -1 - 5y + 6y^2 = 0 \end{cases}$$
   On résout l'équation $-1 - 5y + 6y^2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 25 + 4 \times 6 = 49$ et ainsi
$$y_1 = \frac{5-7}{12} = -\frac{1}{6}, \quad y_2 = \frac{5+7}{12} = 1.$$
   Aux deux valeurs de y correspondent les valeurs de $x = \frac{y-1}{2}$
$$x_1 = \frac{y_1 - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{6} - 1}{2} = -\frac{7}{12}, \quad x_2 = \frac{y_2 - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$
   Ainsi la fonction u admet deux points critiques :
$$\boxed{(x_1, y_1) = \left(-\tfrac{7}{12}, -\tfrac{1}{6}\right), \quad (x_2, y_2) = (0, 1).}$$
4. Déterminer si la fonction u est homogène.
   Si la fonction est homogène d'un certain degré α, on doit avoir $\langle \nabla u, (x,y) \rangle = \alpha u(x,y)$. On calcule le produit scalaire
$$\begin{aligned} \langle \nabla u, (x,y) \rangle &= (2y - 4x - 2)x + (2x - 6y + 6y^2)y \\ &= 2yx - 4x^2 - 2x + 2xy - 6y^2 + 6y^3 \\ &= 4xy - 4x^2 - 6y^2 - 2x + 6y^3. \end{aligned}$$
   D'autre part, on a
$$\alpha u(x,y) = 2\alpha xy - 2\alpha x^2 - 3\alpha y^2 - 2\alpha x + 2\alpha y^3.$$
   Par identification des coefficients, on doit avoir à la fois $\alpha = 2$ (si on regarde les coefficients du monôme xy) et $\alpha = 3$ (coefficients du monôme y^3), et donc <u>la fonction n'est pas homogène</u> d'aucun degré.

Exercice 5 (0,5/0,5/0,5/1=2,5 pts)
On considère les points
$$P = (1,6), \quad Q = (1,2),$$
et les vecteurs
$$\vec{u} = (2,0), \quad \vec{v} = (2,4).$$

1. Calculer la distance euclidienne entre les points P et Q.

2. Donner l'équation paramétrique de la droite D qui passe par les points P et Q.
3. Représenter graphiquement le segment $[P, Q]$ et la droite D.
4. Déterminer les éventuels paramètres $t \in \mathbb{R}$ tels que les vecteurs $\vec{u} + t\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Exercice 6 (1/0,5/0,5=2 pts)

1. Donner la *définition* d'une fonction linéaire $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de fonction linéaire $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas linéaire.
