TD n°1 – Rappels de manipulations algébriques

Le but de cette feuille est de vous faire reprendre familiarité avec la manipulation d'expressions algébriques. Si vous vous réputez suffisamment compétents, quelques exercices suffisent (éventuellement les plus compliqués). En revanche, si vous avez des difficultés avec cette feuille, on vous invite à en faire davantage en consultant d'autres textes ou références en ligne.

Exercice 1.1 (multiplication de polynômes)

(i) $(x^3)^5$;	(vii) $(6 + x^2)^2$;
(ii) $(x + y)(3x^2 - xy + 4)$;	(viii) $(4x + y)^2$;
(iii) $(x^2 - 2x + y)(x + 4y)$;	(ix) $(2 + x)(3 + y)(x - y)$;
(iv) $(-xy + 3)(x + 2)$;	(x) $(x - 2)(y + x^2)(1 + xy)$;
(v) $(x^2 + 4xy - y)(x - y)$;	(xi) $(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$.
(vi) $(x - 3y + 5)(3x + 9y - 2)$;	

Exercice 1.2 (factorisation et racines)

Déterminer les racines réelles (éventuellement en fonction de la variable y) des polynômes suivants et les factoriser.

(i) $4x^2 + 4x + 1$;	(vi) $x^3 - 1$;
(ii) $x^2 - 5x + 6$;	(vii) $x^3 + y^3$;
(iii) $2x^2 - 3x - 8$;	(viii) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$;
(iv) $x^2 + 4xy + 4y^2$;	(*) $4x^3 + 7x^2 - 2x - 5$;
(v) $x^2 - 3xy + 2y^2$;	(*) $2x^2y - 2xy^2 + x^2 - xy + 3x - 3y$.

Exercice 1.3 (somme de fractions rationnelles)

(i) $\frac{x}{x-1} + \frac{4}{x+1}$;	(iv) $\frac{1-y^2}{xy} - \frac{x-y^2}{x^2y}$;
(ii) $\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$;	(v) $\frac{3y}{1+x} - \frac{3xy+2}{(1+x)^2}$.
(iii) $\frac{2x+4}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x+1}$;	

Exercice 1.4 (inégalités)

Décrire l'ensemble des solutions des inégalités suivantes.

(i) $4x + 3 > \sqrt{2}$;	(iv) $\frac{x-3}{x+4} \geq 0$;
(ii) $x^2 - 4x + 4 > 0$;	(v) $x^2 - x \geq 1$;
(iii) $-3x^2 + 2x + 1 \leq 0$;	(vi) $3x^2 \leq 7$.

TD n°1 – Archives

Exercice 2.1 (manipulations algébriques)

Simplifier les expressions

$$\alpha := x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{4}};$$

$$\alpha := 2t^2 \sqrt{t^{\frac{3}{2}}} t^{-3};$$

$$\alpha := [1 + (1 + t^{-1})^{-1}]^{-1};$$

$$\alpha := \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Exercice 2.2 (trinôme du second degré)

On considère le trinôme du second degré $y_m(x) := mx^2 + 2(m-1)x + m - 3$.

1. Pour chacune des valeurs $m := 1$, $m := 2$ et $m := -3$, donner la forme canonique du trinôme, puis tracer sa courbe représentative.
2. Pour quelle valeur de m la courbe de y_m passe-t-elle par le point $(x, y) := (1, 3)$?
3. Calculer le discriminant du trinôme y_m en fonction de m .
4. Calculer la somme et le produit des racines du trinôme y_m en fonction de m (on suppose que les racines existent).

Exercice 2.3 (factorisation des polynômes)

1. Factoriser les polynômes $5x^2 + \frac{9}{2}x + 1$, $20x^2 - 7x - 6$, et $20x^3 - 27x^2 + x + 6$.
2. Factoriser les polynômes $x^3 - 1$, et $x^3 + 1$.
3. Factoriser les expressions $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$, et $x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$.

Exercice 2.4 (sommations)

Donner la valeur des quantités

$$s_1 := \sum_{i=0}^3 (2i+1)^{-1}; \quad s_2 := \sum_{i=1}^7 |4-i|; \quad s_3 := \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{i}{j}; \quad s_4 := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i \frac{j}{i}.$$

Exercice 2.5 (système d'équations linéaires)

Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} (m+1)x + y & = & m+3 \\ 3x + (m-1)y & = & -3. \end{cases}$$

On explicitera le déterminant du système et on discutera en fonction du paramètre m .

TD n°2 – Fonctions élémentaires

Exercice 3.1 (parties du plan)

Représenter graphiquement ces sous-ensembles du plan $\mathbb{R}^2$ à l'aide de graphes de fonctions élémentaires.

- (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$;
- (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{1/2}, x \geq 0\}$;
- (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x^3|\}$;
- (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^3\}$;
- (v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^4 + 5\}$;
- (vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < e^x + 3\}$;
- (vii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^{|x|}\}$;
- (viii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \ln(|x| + 4)\}$;
- (ix) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1, x + y \leq 0\}$;
- (x) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 5, 2x - y = 2\}$;
- (xi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y + 1 = 0, x + y = -3\}$;
- (*) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \leq 2, x - y \geq -1, e^{x+3} > y\}$;
- (*) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

Exercice 3.2 (ensembles de définition)

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

- (i) $f(x) = \ln(x - 1)$;
- (ii) $g(x) = x^{1/3} + 27x - 2$;
- (iii) $h(x) = (x^2 - 16x)^{1/2} + 42\pi$;
- (iv) $k(x) = \sqrt{2 - x^2}$;
- (v) $u(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$;
- (vi) $v(x) = (\ln(1 + x))^{-1}$;
- (vii) $w(x) = \ln(1 - e^{3x})$;
- (viii) $k_1(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$;
- (ix) $k_2(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x - 1) - \frac{1}{2} \ln(x + 1)$;
- (x) $f(x, y) = \frac{x + 4y + \ln(x + 4y)}{\sqrt{y - e^x}}$;
- (*) $g(x, y) = \ln(\ln(x^2 - 5x + 2 - y))$;
- (*) $h(x, y) = \frac{\ln(|x + y| - 2)}{e^{x-y} - 2}$;
- (*) $k(x, y) = (16x^4 - 1)^{1/4} + \frac{1}{x + y}$.

TD n°2 – Archives

Exercice 4.1 (Intersection de demi-plans)

Représenter graphiquement l'ensemble

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -x_1 + x_2 \leq 1, 2x_1 + x_2 \geq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Exercice 4.2 (représentation graphique de fonctions usuelles et de leurs transformées)

1. Représenter géométriquement le graphe des fonctions $x \mapsto x, x^2, x^3, x^{\frac{1}{2}}, x^{-1}$.
2. Donner l'allure du graphe des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= 1 - (x + 1)^2; & f_2(x) &:= 1 + \ln(x - 1); & f_3(x) &:= -1 + e^{x-1}; \\ f_4(x) &:= -2 + |x + 1|; & f_5(x) &:= 1 + x + |x|; & f_6(x) &:= |\ln x|. \end{aligned}$$

Exercice 4.3 (domaine de définition des fonctions de deux variables)

Expliciter et représenter géométriquement le domaine de définition des fonctions

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= \sqrt{1 + x_2 - x_1^2}; & g(x_1, x_2) &:= (x_2 + \ln x_1)^{-1}; & h(x_1, x_2) &:= \sqrt{1 + \ln(x_1 + x_2)}; \\ u(x_1, x_2) &:= \ln \left[\frac{x_1}{x_2} \right]; & v(x_1, x_2) &:= \sqrt{x_2 - \frac{1}{x_1}}. \end{aligned}$$

Exercice 4.4 (courbes de niveau des fonctions de deux variables)

Représenter géométriquement les courbes de niveau des fonctions

$$f(x_1, x_2) := x_1 x_2; \quad g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2; \quad h(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2.$$

Exercice 4.5 (composition des fonctions)

1. On pose $f(x) := \frac{x}{1+x}$ et $g(x) := x^2$. Expliciter $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. On pose $f(x) := x^2$, $g(x) := x^{-1}$ et $h(x_1, x_2) := x_1 + \frac{1}{x_2}$. Expliciter $u := f \circ h$ et $v := g \circ h$.
3. Ecrire chacune des fonctions $f(x) := \ln \sqrt{1+x^2}$, $g(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $h(x_1, x_2) := \sqrt{x_1}$, comme la composée de 2 ou 3 fonctions.

TD n°3 – Dérivées

Exercice 5.1 (une variable)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(i) $f(x) = \ln(2x + 4) + e^{2x}$;

(ii) $g(x) = x^\pi + 27x - 2$;

(iii) $h(x) = e^x(2x^4 - x)^{1/3} - 17x^{-5}$;

(iv) $k(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$;

(v) $f(x) = \frac{x^4 - 2x + 3}{x - 2}$;

(vi) $g(x) = \sqrt{\ln(x + 5)} - 4\frac{2}{x + 4}$;

(*) $h(x) = (x^2 + 2)e^{\frac{1}{2}x^4 - 1/x} + \frac{1}{32}(4x - 3)^8$.

Exercice 5.2 (deux variables)

Calculer le gradient des fonctions suivantes.

(i) $f(x, y) = 2x^2 - xy^3 + 3y^2 + 6xy - 10y^{-1} + 500$;

(ii) $g(x, y) = \ln \frac{x + 4y}{2x^2 + y}$;

(iii) $h(x, y) = \ln(x + 3y^2) - ye^{-xy}$;

(iv) $u(x, y) = e^{3x^2 - y}(4y + 7)^5$;

(*) $v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 3\ln(y - x)}} - 47x^4 + 28$;

(*) $w(x, y) = ye^x \frac{xy^3 + 4}{3y^2 - x}$.

TD n°3 – Archives

Exercice 6.1 (dérivation des fonctions d'une variable)

Calculer la dérivée des fonctions

$$\begin{array}{lll} f(x) := 3x^{\frac{3}{2}} & g(x) := x^{-3} + x^3 & h(x) := \sqrt{x^2 - 1} \\ f(x) := \ln(\sqrt{1 + x^2}) & g(x) := x^3 e^{\frac{1}{x}} & h(x) := 2^x \\ f(x) := (2x^3 + 1)^5 & g(x) := \ln(1 - e^{3x}) & h(x) := \frac{x^5}{(1 + x^3)^2}. \end{array}$$

Exercice 6.2 (dérivées partielles des fonctions de deux variables)

Calculer les dérivées partielles des fonctions

$$\begin{array}{lll} f(x_1, x_2) := x_1 x_2 & g(x_1, x_2) := 4x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 & h(x_1, x_2) := \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \\ f(x_1, x_2) := 5x_1^{\frac{4}{5}} x_2^{\frac{2}{3}} & g(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & h(x_1, x_2) := (x_1 + 2x_2)/(x_1^2 + x_2^2) \\ f(x_1, x_2) := \ln(x_1 x_2 + x_1^2) & g(x_1, x_2) := x_2 \sqrt{x_1} e^{\frac{x_1}{x_2}}. & \end{array}$$

Exercice 6.3 (calculs d'élasticité)

1. Calculer l'élasticité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, où α est un paramètre réel.
2. Calculer les élasticités partielles de la fonction $f(x_1, x_2) := x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{3}{4}}$.

TD n°4 – Points critiques

Exercice 7.1

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, dérivées première et seconde, tableau de variation, points critiques et leur nature, allure du graphe).

(i) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. En effet, il faut que le dénominateur $1+x^2$ soit non nul, donc $1+x^2 \neq 0$. Or, $1+x^2 \geq 1$ pour tout x , donc la condition est toujours satisfaite. Calculons les dérivées, en utilisant la règle de dérivation d'une fraction $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$.

$$f'(x) = \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2 - (1-x^2)((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{(-2x)(1+x^2)^2 - (1-x^2)(2(1+x^2)(2x))}{(1+x^2)^4} \quad (\text{on factorise le numérateur par } -2x(1+x^2)) \\ &= -2x \frac{(1+x^2) + (1-x^2)(2)}{(1+x^2)^3} = -2x \frac{1+x^2+2-2x^2}{(1+x^2)^3} = -2x \frac{3-x^2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Déterminons les éventuels points critiques. La condition $f'(x) = 0$ est donc

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

Donc $\text{Crit}(f) = \{-1, 1\}$. Il faut ensuite déterminer le tableau de variations de f . Pour cela, il faut déterminer quand $f'(x) > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 &\Leftrightarrow 1-x^2 > 0 && (\text{le dénominateur est } > 0) \\ &\Leftrightarrow x \in]-1; 1[&& (\text{le coefficient } a \text{ de } 1-x^2 \text{ est } a = -1 < 0, \\ &&& \text{donc il faut choisir l'intervalle entre les deux racines}). \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$	-	0	+	-
$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$				

Donc le point critique $x = -1$ est un *point de minimum local*, et le point critique $x = 1$ est un *point de maximum local*.

(ii) $g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. En effet, la fonction est donnée par un polynôme, donc il n'y a aucune restriction. Calculons les dérivées.

$$g'(x) = 3x^2 + 6x - 1.$$

$$g''(x) = 6x + 6.$$

Déterminons les éventuels points critiques. La condition $g'(x) = 0$ est donc $3x^2 + 6x - 1 = 0$. Pour déterminer les solutions de cette équation, on calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 36 + 12 = 48, \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3},$$

et on a les deux solutions

$$x_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{6} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Donc

$$\text{Crit}(g) = \left\{ \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

Il faut ensuite déterminer le tableau de variations de g . Pour cela, il faut déterminer quand $g'(x) > 0$: comme g' est un trinôme du second degré, avec $a = 3 > 0$, il sera positif à l'extérieur des deux racines x_1 et x_2 :

x	$-\infty$	$\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
g'	+	0	-	0	+
g					

Donc le point critique $x_1 = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$ est un *point de maximum local*, et le point critique $x_2 = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$ est un *point de minimum local*.

(iii) $h(x) = \ln|x^2 - 5x + 4|$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$. En effet, il faut que l'argument du logarithme soit > 0 , et comme il est en valeur absolue, donc ≥ 0 , il suffit juste de demander qu'il soit différent de 0. Donc il reste à déterminer les racines du trinôme $P(x) = x^2 - 5x + 4$: on a

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3,$$

et donc

$$x_1 = \frac{5 - 3}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4.$$

Pour calculer les dérivées, il faut d'abord expliciter la définition de valeur absolue. Puisque le trinôme P a le coefficient $a > 0$, il est négatif entre les racines 1 et 4, donc on a

$$h(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - 5x + 4) & \text{si } x \in]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[, \\ \ln(-(x^2 - 5x + 4)) & \text{si } x \in]1; 4[. \end{cases}$$

Calculons les dérivées.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \begin{cases} \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} & \text{si } x \in]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[, \\ \frac{-(x^2 - 5x + 4)'}{-(x^2 - 5x + 4)} & \text{si } x \in]1; 4[\end{cases} \\ &= \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h''(x) &= \left(\frac{2x-5}{x^2-5x+4} \right)' = \frac{(2x-5)'(x^2-5x+4) - (2x-5)(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)^2} \\
 &= \frac{2(x^2-5x+4) - (2x-5)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{2x^2-10x+8 - (4x^2-20x+25)}{(x^2-5x+4)^2} \\
 &= \frac{-2x^2+10x-17}{(x^2-5x+4)^2}.
 \end{aligned}$$

Déterminons les éventuels points critiques.

$$h'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4} = 0 \Leftrightarrow 2x-5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Donc

$$\text{Crit}(h) = \{5/2\}.$$

Il faut ensuite déterminer le tableau de variations de h . Pour cela, il faut déterminer quand $h'(x) > 0$: comme h' est une fraction, on doit considérer numérateur et dénominateur séparément :

x	$-\infty$		1		$5/2$		4		$+\infty$	
$2x-5$		-		-	0	+		+		
x^2-5x+4		+		-		-		+		
h'		-		+	0	-		+		
h	↘			↗			↘		↗	

Donc le point critique $x = 5/2$ est un *point de maximum local*.

(iv) $k(x) = \frac{\ln(3x)}{x}$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_k =]0; +\infty[$. En effet, il faut que l'argument du logarithme soit > 0 , donc $3x > 0$, ainsi $x > 0$. Calculons les dérivées.

$$k'(x) = \frac{(\ln(3x))'x - \ln(3x) \times (x)'}{x^2} = \frac{\frac{3}{3x}x - \ln(3x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(3x)}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 k''(x) &= \left(\frac{1 - \ln(3x)}{x^2} \right)' = \frac{(1 - \ln(3x))'(x^2) - (1 - \ln(3x))(x^2)'}{x^4} \\
 &= \frac{-\frac{3}{3x} \times x^2 - (1 - \ln(3x)) \times 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln(3x)}{x^4} \\
 &= \frac{-3 + 2 \ln(3x)}{x^3}.
 \end{aligned}$$

(on simplifie une puissance de x).

Déterminons les éventuels points critiques.

$$k'(x) = \frac{1 - \ln(3x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(3x) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x) = 1,$$

donc en prenant l'exponentielle des deux côtés, on obtient $3x = e$, d'où

$$\text{Crit}(k) = \{e/3\}.$$

Il faut ensuite déterminer le tableau de variations de k . Pour cela, il faut déterminer quand $k'(x) > 0$. Puisque le dénominateur x^2 est toujours strictement positif, il faut juste regarder le signe du numérateur :

$$1 - \ln(3x) > 0 \Leftrightarrow \ln(3x) < 1 \Leftrightarrow 3x < e \Leftrightarrow x < e/3.$$

x	0	$e/3$	$+\infty$	
k'		+	0	-
k				

Donc le point critique $x = e/3$ est un *point de maximum local*.

(v) $u(x) = x^2 e^{3x+5}$;

(vi) $v(x) = e^x + 4e^{-x}$.

Exercice 10.1 (deux variables)

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

(i) $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 3y^2$;

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 6y.$$

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 0 \\ x = -\frac{6}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(-3y) + 2y = 0 \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -22y = 0 \\ x = -3y \end{cases}$$

La première équation nous donne $y = 0$, d'où $x = -3y = 0$. On a donc $\text{Crit}(f) = \{(0, 0)\}$.

(ii) $g(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$;

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 8x - 12y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -12x + 18y.$$

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 0 \\ -12x + 18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x - 3y) = 0 \\ -6(2x - 3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Les deux conditions sont identiques, donc tout point satisfaisant $2x - 3y = 0$ donne un point critique de g . On a donc $\text{Crit}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$ (il s'agit d'une droite de points critiques).

(iii) $h(x, y) = xy$;

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x.$$

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

On a donc $\text{Crit}(h) = \{(0, 0)\}$.

(iv) $k(x, y) = x^2y - x^2 - y$;

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, y) = 2xy - 2x, \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x, y) = x^2 - 1.$$

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation a pour solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. On utilise la première équation pour trouver la coordonnée y correspondante :

$$2xy - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(y - 1) = 0,$$

et puisque on a $x_1, x_2 \neq 0$, la seule possibilité est $y = 1$. On a donc $\text{Crit}(k) = \{(-1, 1), (1, 1)\}$.

(v) $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$;

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{x^2+y^2} = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Puisque le facteur $e^{x^2+y^2}$ est toujours strictement positif, la seule solution possible est $x = 0$ et $y = 0$. On a donc $\text{Crit}(u) = \{(0, 0)\}$.

(vi) $v(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + 3y^2}$;

(vii) $w(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$.

TD n°5 – Géométrie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 12.1

Soient $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (0, 3)$, et $\vec{c} = (-4, 2)$.

1. Représenter géométriquement les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.
2. Calculer directement les coordonnées de $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
3. Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
4. Calculer les produits scalaires $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$, $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Exercice 12.2

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{a} = (2, -t + 1, t)$, $\vec{b} = (1 + t, 2t, -3)$.

1. Pour quelles valeurs de t les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires ? Orthogonaux ?
2. Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$.
3. Calculer la distance entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Pour quelle valeur de t est-elle minimale ?

Exercice 12.3

1. Représenter la droite qui passe par $P = (1, 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (0, 1)$. Écrire l'équation de la droite en forme paramétrique.
2. Représenter la droite qui passe par $P = (-1, 2)$ et $Q = (2, 5)$. Expliciter le vecteur directeur. Écrire l'équation de la droite en forme paramétrique.
3. Représenter la demi-droite positive qui passe par $P = (2, 5)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-1, 2)$. Écrire l'équation de la demi-droite en forme paramétrique.
4. Représenter la demi-droite positive qui passe par $P = (-1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (3, 4)$. Écrire l'équation de la demi-droite en forme paramétrique.
5. Représenter le segment qui passe par $P = (0, 4)$ et $Q = (1, 1)$. Écrire l'équation du segment en forme paramétrique.

Exercice 12.4

Déterminer quels ensembles sont convexes et/ou des cônes.

(i) $A = [0, 1]$;

L'ensemble A est un intervalle de $\mathbb{R}$, donc il est convexe. Il n'est pas un cône, puisqu'il n'apparaît pas dans la liste des 8 cônes de $\mathbb{R}$.

(ii) $B =]1, 2]$;

L'ensemble B est un intervalle de $\mathbb{R}$, donc il est convexe. Il n'est pas un cône, puisqu'il n'apparaît pas dans la liste des 8 cônes de $\mathbb{R}$.

(iii) $C = [0, +\infty[$;

L'ensemble C est un intervalle de $\mathbb{R}$, donc il est convexe. Il est un cône (il apparaît dans la liste des 8 cônes de $\mathbb{R}$).

(iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y \geq 0\}$;

L'ensemble A est un demi-plan de $\mathbb{R}^2$, et il est donc convexe. Il est aussi un cône puisque la droite qui borde le demi-plan passe par l'origine. De manière plus concrète, on vérifie que si $2x - 3y \geq 0$ et $t > 0$, alors le point (tx, ty) satisfait $2(tx) - 3(ty) = t(2x - 3y) \geq 0$.

(v) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y \geq 1\}$;

- (vi) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$;
- (vii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- (viii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$;
- (ix) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 2x)(2y + x - 1) = 0\}$;
- (x) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + x - 1 = 0\}$.

TD n°5 – Archives

Exercice 14.1 (représentation paramétrique de droites, demi-droites et segments)

Donner une description paramétrique

- . de la droite D qui passe par le point $P := (1, 2)$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{d} := (1, -1)$.
- . de la demi-droite D_+ issue du point $P := (1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d} := (1, -1)$.
- . de la droite Δ qui passe par les points $A := (1, 2)$ et $B := (2, 1)$.
- . du segment de droite S qui joint les points $A := (1, 2)$ et $B := (2, 1)$.

Exercice 14.2 (représentation graphique de vecteurs, de droites, demi-droites et segments)

Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont données par $\vec{a} := (-2, 3)$, $\vec{b} := (4, 1)$ et $\vec{c} := (4, 6)$.

1. Construire graphiquement les vecteurs $2\vec{b}$, $-\vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ et $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$.
2. Représenter graphiquement les ensembles

$$D := \{\vec{a} + t\vec{b} : t \in \mathbb{R}\};$$

$$D_+ := \{\vec{a} + t\vec{b} : t \geq 0\};$$

$$\Delta := \{(1 + 2t, 1 - 3t) : t \in \mathbb{R}\};$$

$$S := \{t\vec{a} + (1 - t)\vec{c} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Exercice 14.3 (norme, produit scalaire et distance)

On se donne trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} := (1, -1, 3, 2)$, $\vec{b} := (2, 5, -1, 3)$ et $\vec{c} := (1, 2, 0, -4)$.

1. Calculer $\vec{u} := 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ainsi que $\|\vec{u}\|$.
2. Calculer les quantités $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ainsi que la distance euclidienne entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Que dire de l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

Exercice 14.4 (orthogonalité et colinéarité)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux vecteurs $\vec{x}(\alpha) := (1, \alpha + 1, 2 - \alpha)$ et $\vec{y}(\alpha) := (2\alpha, 3\alpha + 1, 3\alpha - 1)$ dont les coordonnées dépendent d'un paramètre α . Pour quelle(s) valeur(s) de ce paramètre α :

1. les vecteurs $\vec{x}(\alpha)$ et $\vec{y}(\alpha)$ sont-ils orthogonaux ?

On a

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}(\alpha), \vec{y}(\alpha) \rangle &= 1 \times (2\alpha) + (\alpha + 1) \times (3\alpha + 1) + (2 - \alpha) \times (3\alpha - 1) \\ &= 2\alpha + (3\alpha^2 + 3\alpha + \alpha + 1) + (6\alpha - 2 - 3\alpha^2 + \alpha) \\ &= 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 3\alpha^2 + 7\alpha - 2 \\ &= 13\alpha - 1. \end{aligned}$$

Donc les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $13\alpha - 1 = 0$, donc pour $\alpha = 1/13$.

2. les vecteurs $\vec{x}(\alpha)$ et $\vec{y}(\alpha)$ sont-ils colinéaires ? Préciser le coefficient de colinéarité.

On remarque que la première coordonnée du vecteur $\vec{x}(\alpha)$ est 1, $\vec{x}(\alpha) \neq \vec{0}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche les constantes $k \in \mathbb{R}$ telles que $\vec{y}(\alpha) = k\vec{x}(\alpha)$ ait une solution, ce qui revient à chercher des solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 2\alpha = k \\ 3\alpha + 1 = k(\alpha + 1) \\ 3\alpha - 1 = k(2 - \alpha) \end{cases}$$

En remplaçant k par 2α dans les deux dernières équations, on obtient

$$\begin{cases} k = 2\alpha \\ 3\alpha + 1 = 2\alpha(\alpha + 1) \\ 3\alpha - 1 = 2\alpha(2 - \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\alpha \\ 3\alpha + 1 = 2\alpha^2 + 2\alpha \\ 3\alpha - 1 = 4\alpha - 2\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\alpha \\ 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont égales, donc il suffit de chercher les solutions de $2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.

On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$, et

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{1 + 3}{4} = 1.$$

Pour $\alpha_1 = -1/2$, le coefficient de colinéarité k est $k_1 = 2\alpha_1 = -1$, alors que pour α_2 on trouve $k_2 = 2\alpha_2 = 2$.

TD n°6 – Fonctions sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 16.1 (fonctions linéaires et fonctions affines)

Déterminer quelles fonctions sont affines, et préciser si elles sont aussi linéaires. Si oui, écrire la fonction sous la forme $f(x) = \langle a, x \rangle + c$, où $a \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Si non, justifier la réponse.

(i) $f(x) = 1 + x + x^2$;

On calcule $f'(x) = 1 + 2x$, ce n'est pas une constante, donc la fonction n'est pas affine.

(ii) $g(x) = 2 + 3x$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ (la fonction est un polynôme), la dérivée $g'(x) = 3$ est une constante, donc la fonction est affine. On a $g(0) = 2 \neq 0$, donc la fonction n'est pas linéaire. On a $a = g'(x) = 3$, et $c = g(0) = 2$.

(iii) $h(x) = \sqrt{x^3 - 1}$;

Pour la présence de la racine carrée, on a que le domaine de définition de la fonction est $\mathcal{D}_h = \{x^3 - 1\} = [1, +\infty[$, donc différent de $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction n'est donc pas affine.

(iv) $u(x, y) = 2x - 3y$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$ (la fonction est un polynôme à deux variables). Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -3$ sont constantes, donc la fonction est affine. On a $u(0, 0) = 0$, donc la fonction est linéaire. On a $a = \nabla u = (2, -3)$, et $c = u(0, 0) = 0$.

(v) $v(x, y) = -x + 10$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$ (la fonction est un polynôme à deux variables). Les dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$ sont constantes, donc la fonction est affine. On a $v(0, 0) = 10 \neq 0$, donc la fonction n'est pas linéaire. On a $a = \nabla v = (-1, 0)$, et $c = v(0, 0) = 10$.

(vi) $w(x, y, z) = x + y - 5z$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^3$ (la fonction est un polynôme à trois variables). Les dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z) = 1$, $\frac{\partial w}{\partial y}(x, y, z) = 1$, $\frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z) = -5$, sont constantes, donc la fonction est affine. On a $w(0, 0, 0) = 0$, donc la fonction est linéaire. On a $a = \nabla w = (1, 1, -5)$, et $c = w(0, 0, 0) = 0$.

Exercice 16.2 (fonctions convexes et fonctions concaves)

Déterminer si le domaine de définition des fonctions suivantes est convexe. Déterminer quelles fonctions sont convexes ou concaves sur leur domaine de définition. Justifier les réponses.

(i) $f(x) = |x| + 1$;

La fonction $u(x) = |x|$ est convexe, ainsi que la fonction constante $v(x) = 1$. Donc $f = u + v$ est somme de fonctions convexes, donc convexe. La fonction ne peut pas être aussi concave puisque les seules fonctions à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines (et f n'est pas dérivable en $x = 0$, donc elle ne peut pas être affine).

(ii) $g(x) = \ln x^2$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \{x^2 > 0\} = \mathbb{R}^*$, qui n'est pas un ensemble convexe. Donc la fonction ne peut être ni convexe, ni concave.

(iii) $h(x) = 2 \ln x$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_h = \{x > 0\} =]0, +\infty[$, qui est un intervalle, donc convexe. On a $h'(x) = \frac{2}{x}$, $h''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$, donc la fonction est concave (et pas convexe).

(iv) $k(x) = \frac{x}{1 + x^2}$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_k = \{1 + x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$, qui est convexe. On calcule

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Déterminons les éventuels points critiques et leur nature. La condition $k'(x) = 0$ est donc

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

Donc $\text{Crit}(k) = \{-1, 1\}$. Il va ensuite déterminer le tableau de variations de k . Pour cela, il faut déterminer quand $k'(x) > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 &\Leftrightarrow 1-x^2 > 0 && \text{(le dénominateur est } > 0) \\ &\Leftrightarrow x \in]-1; 1[&& \text{(le coefficient } a \text{ de } 1-x^2 \text{ est } a = -1 < 0, \\ &&& \text{donc il faut choisir l'intervalle entre les deux racines).} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$k'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$	-	0	+	0	-
$k(x) = \frac{x}{1+x^2}$					

Donc le point critique $x = -1$ est un *point de minimum local*, et le point critique $x = 1$ est un *point de maximum local*. Puisqu'il y a un point de minimum local (et la fonction n'est pas constante), la fonction n'est pas concave. De manière similaire, la présence d'un point de maximum local implique que la fonction n'est pas convexe.

(v) $u(x, y) = |x + y|$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$, qui est convexe. La fonction $g(x) = |x|$ est convexe, la fonction $a(x, y) = x + y$ est affine, donc la fonction $u = g \circ a$ est convexe. (La fonction n'est pas affine donc elle ne peut pas être aussi concave.)

(vi) $v(x, y) = e^{|2x-y|}$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$, qui est convexe. La fonction $g(x) = e^x$ est convexe croissante, la fonction $f(x, y) = |2x - y|$ est convexe (puisque composition d'une fonction convexe avec une fonction affine), donc la fonction $v = g \circ f$ est convexe. (La fonction n'est pas affine donc elle ne peut pas être aussi concave.)

(vii) $w(x, y) = e^{2x-3y+y}$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$, qui est convexe. La fonction $g(x) = e^x$ est convexe, la fonction $a(x, y) = 2x - 3y + y = 2x - 2y$ est affine, donc la fonction $w = g \circ a$ est convexe. (La fonction n'est pas affine donc elle ne peut pas être aussi concave.)

(viii) $t(x, y, z) = x^4 + y^2 + z$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^3$, qui est convexe. C'est la somme de trois fonctions convexes, donc la fonction est convexe. (La fonction n'est pas affine donc elle ne peut pas être aussi concave.)

(*) $s(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$.

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, qui est un demi-plan, donc convexe. Par contre la fonction n'est ni convexe ni concave. Pour voir cela, considérons d'abord les points $P = (0, 0)$ et $Q = (1, 0)$, et soit $t = 1/2$. Alors on a

$$s(P) = 0, \quad s(Q) = 1, \quad s((1-t)P + tQ) = s(1/2, 0) = 1/4, \quad (1-t)s(P) + ts(Q) = 1/2,$$

d'où

$$s((1-t)P + tQ) = \frac{1}{4} < (1-t)s(P) + ts(Q) = \frac{1}{2}.$$

La fonction ne peut pas être concave. On considère maintenant les points $P' = (0, 0)$ et $Q' = (0, 1)$, et soit $t = 1/2$. Alors on a

$$s(P') = 0, \quad s(Q') = 1, \quad s((1-t)P' + tQ') = s(0, 1/2) = 1/\sqrt{2}, \quad (1-t)s(P') + ts(Q') = 1/2,$$

d'où

$$s((1-t)P' + tQ') = \frac{1}{\sqrt{2}} > (1-t)s(P') + ts(Q') = \frac{1}{2}.$$

La fonction ne peut pas être convexe.

Exercice 18.1 (fonctions homogènes)

Déterminer si le domaine de définition des fonctions suivantes est un cône. Déterminer quelles fonctions sont homogènes, et préciser le degré d'homogénéité. Justifier les réponses.

(i) $f(x) = 2|x| - x$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, qui est un cône. Si $t > 0$, on a

$$f(tx) = 2|tx| - tx = 2t|x| - tx = t(2|x| - x) = tf(x),$$

donc la fonction est homogène de degré 1.

(ii) $g(x) = x^2 - x$;

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, qui est un cône. La fonction est dérivable, donc on peut regarder si l'identité d'Euler est satisfaite pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $g'(x) = 2x - 1$, et on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $xg'(x) = \alpha g(x)$. Ceci correspond à l'équation

$$x(2x - 1) = \alpha(x^2 - x) \Leftrightarrow 2x^2 - x = \alpha x^2 - \alpha x.$$

L'équation est polynomiale en x , donc pour qu'elle soit satisfaite, il faut que les coefficients des termes de même degré d'une part et de l'autre de l'équation soit égaux : ceci nous donne le système

$$\begin{cases} \alpha = 2 & \text{(coefficients de } x^2) \\ \alpha = -1 & \text{(coefficients de } x) \end{cases}$$

Les deux conditions sont incompatibles, donc la fonction n'est pas homogène.

(iii) $h(x, y) = \frac{x}{y^2 + xy}$;

Première méthode : Le domaine de définition est

$$\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + xy \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{y^2 + xy = 0\}.$$

Rappelons qu'un ensemble est un cône si et seulement si son complémentaire est un cône, donc il suffit de déterminer si l'ensemble

$$\{y^2 + xy = 0\} = \{y(y+x) = 0\} = \{y = 0\} \cup \{y+x = 0\} \quad \text{(un produit est nul si l'un des deux facteurs est nul)}$$

est un cône. Or, l'ensemble $\{y = 0\}$ est une droite qui passe par l'origine, ainsi que $\{y+x = 0\}$, donc les deux sont des cônes. Puisqu'on a écrit $\{y^2 + xy = 0\}$ comme une union de deux cônes, on a que c'est aussi un cône.

Deuxième méthode : le domaine de définition est

$$\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + xy \neq 0\}.$$

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_h$ et $t > 0$. Pour vérifier si $(tx, ty) \in \mathcal{D}_h$, il faut vérifier si $(ty)^2 + (tx)(ty) \neq 0$. Or, on a

$$(ty)^2 + (tx)(ty) = t^2y^2 + t^2xy = t^2(y^2 + xy),$$

et puisque $t > 0$ et $y^2 + xy$ (car $(x, y) \in \mathcal{D}_h$), on a bien $(ty)^2 + (tx)(ty) \neq 0$. Ceci montre que $\mathcal{D}_h$ est un cône.

On va vérifier maintenant si la fonction est homogène. Soit $t > 0$. On calcule

$$h(tx, ty) = \frac{tx}{(ty)^2 + (tx)(ty)} = \frac{tx}{t^2(y^2 + xy)} = \frac{t}{t^2} \frac{x}{y^2 + xy} = \frac{1}{t} h(x, y).$$

Puisque $\frac{1}{t} = t^{-1}$, on a que la fonction h est homogène de degré -1 .

(iv) $k(x, y) = \frac{x}{y^2 - x}$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = y^2\}$. Ceci n'est pas un cône : pour le vérifier, on va vérifier que le complémentaire $\{x = y^2\}$ ne l'est pas. Pour cela, on remarque que le point $P = (1, 1)$ satisfait $x = y^2$, mais $2P = (2, 2)$ ne satisfait pas cette condition.

On en conclut que la fonction n'est pas homogène.

(v) $u(x, y) = e^{x/y} + 3$;

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Il s'agit d'un cône, puisque c'est le complémentaire d'une droite qui passe par l'origine. On va vérifier maintenant si la fonction est homogène :

$$u(tx, ty) = e^{(tx)/(ty)} + 3 = e^{x/y} + 3 = u(x, y).$$

Puisque $1 = t^0$, on en conclut que la fonction est homogène de degré 0 .

(vi) $v(x, y) = x^{1/2}y^{1/3} + xy^{-1/6}$.

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_v = \{x \geq 0, y > 0\}$, par la présence des puissances $1/2$ et $-1/6$. Cet ensemble est un cône : si $(x, y) \in \mathcal{D}_v$, et $t > 0$, alors on aura $tx \geq 0$ et $ty > 0$, donc $(tx, ty) \in \mathcal{D}_v$. On, vérifie maintenant si la fonction est homogène.

$$\begin{aligned} v(tx, ty) &= (tx)^{1/2}(ty)^{1/3} + (tx)(ty)^{-1/6} \\ &= t^{1/2+1/3}x^{1/2}y^{1/3} + t^{1-1/6}xy^{-1/6} = t^{5/6}x^{1/2}y^{1/3} + t^{5/6}xy^{-1/6} \\ &= t^{5/6}x^{1/2}y^{1/3} + xy^{-1/6} = t^{5/6}v(x, y). \end{aligned}$$

La fonction est donc homogène de degré $5/6$.

TD n°6 – Archives

Exercice 20.1 (fonctions linéaires et fonctions affines)

1. Mettre les fonctions $f_1(x_1, x_2) := 2x_1 + 3x_2$ et $f_2(x_1, x_2) := -x_1 + 5x_2$ sous la forme $f(x) = \langle a, x \rangle$ où a est un vecteur que l'on explicitera.

Le vecteur a est donné par les coefficients des variables x_i : pour f_1 on trouve le vecteur $a = (2, 3)$, et donc

$$f_1(x_1, x_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

De manière similaire, pour la fonction f_2 on a

$$f_2(x_1, x_2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Les fonctions suivantes sont-elles linéaires ? affines ?

(i) $f(x) := 1 + 2x$,

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f'(x) = 2$, constante. Donc la fonction est affine. On a $f(0) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas linéaire.

(ii) $f(x) := x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

Pour certaines valeurs de α , la fonction puissance x^α n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$, donc elle ne sera pas affine. Plutôt que faire la liste des valeurs possibles, on va regarder directement la dérivée :

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

cette dérivée est constante si et seulement si $\alpha = 0$ (dans ce cas $f'(x) = 0$) ou $\alpha - 1 = 0$ (dans ce cas $f'(x) = x^0 = 1$). Si $\alpha = 0$, on a $f(x) = x^0 = 1$, qui n'est pas linéaire (puisque $f(0) = 1 \neq 0$). Si $\alpha = 1$, alors $f(x) = x$, et $f(0) = 0$, donc f est linéaire.

(iii) $f(x) := |x|$,

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$. Donc elle ne peut pas être affine.

(iv) $f(x_1, x_2) := x_1 - 3x_2$

Cette fonction est polynomiale, donc elle est définie sur $\mathbb{R}^2$. On va calculer le gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -3.$$

Les dérivées partielles sont constantes, donc la fonction est affine. De plus, on a $f(0, 0) = 0 - 3 \times 0 = 0$, donc la fonction est linéaire.

(v) $f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 + x_2}$

Cette fonction est définie sur $\{x_1 + x_2 \geq 0\} \neq \mathbb{R}^2$, donc elle n'est pas affine.

(vi) $f(x_1, x_2) := \ln(x_1/x_2)$

Cette fonction est définie sur $\{x_1/x_2 > 0\} \neq \mathbb{R}^2$, donc elle n'est pas affine.

(vii) $f(x_1, x_2, x_3) := 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4$.

La fonction est polynomiale, donc elle est définie sur $\mathbb{R}^3$. On calcule le gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -1.$$

Les dérivées partielles sont constantes, donc la fonction est affine. On a

$$f(0, 0, 0) = 3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 - 4 = -4 \neq 0,$$

donc la fonction n'est pas linéaire.

Exercice 20.2 (fonctions convexes et fonctions concaves)

Etudier la convexité/concavité des fonctions suivantes :

(i) $f(x) := x^2 - x + e^x$,

Première méthode. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, qui est convexe. On va calculer la dérivée seconde de f :

$$f'(x) = 2x - 1 + e^x, \quad f''(x) = 2 + e^x.$$

Puisque $2 + e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que la fonction est convexe (est pas concave).

Deuxième méthode. La fonction f est la somme des fonctions convexes $x^2 - x$ (car trinôme du second degré avec $a > 0$), et e^x :

$$f(x) = (x^2 - x) + e^x,$$

donc elle est convexe.

(ii) $f(x) := \sqrt{x} + \ln x$,

Première méthode. La fonction f est la somme des fonctions $\sqrt{x}$ et $\ln x$ qui sont les deux concaves, donc la fonction f est concave.

Deuxième méthode. La fonction est définie sur $\{x \geq 0, x > 0\} = \{x > 0\} =]0, +\infty[$ qui est convexe (car intervalle). On calcule la dérivée seconde :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{4x^{3/2}} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Donc $f''(x) < 0$ sur $\{x > 0\}$, et on a que la fonction est concave.

(iii) $f(x) := x \ln x$,

La fonction est définie sur $\{x > 0\} =]0, +\infty[$ qui est convexe (car intervalle). On calcule la dérivée seconde :

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc $f''(x) > 0$ sur $\{x > 0\}$, et on a que la fonction est convexe.

(iv) $f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 + x_2}$,

La fonction f est la composée $f = g \circ a$ où $a(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ est une fonction affine, et $g(x) = \sqrt{x}$ est une fonction concave. Donc f est concave.

(v) $f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$,

La fonction $f_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ est concave puisque c'est la composée $f_1 = g \circ a_1$, où $g = \sqrt{x}$ (concave) et $a_1(x_1, x_2) = x_1$ (affine). Également, on a que la fonction $f_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$ est concave. Puisque $f = f_1 + f_2$ est la somme de deux fonctions concaves, elle est aussi concave.

(vi) $f(x_1, x_2) := |x_1| + |x_2|$,

La fonction $f_1(x_1, x_2) = |x_1|$ est convexe puisque c'est la composée $f_1 = g \circ a_1$, où $g = |x|$ (convexe) et $a_1(x_1, x_2) = x_1$ (affine). Également, on a que la fonction $f_2(x_1, x_2) = |x_2|$ est convexe. Puisque $f = f_1 + f_2$ est la somme de deux fonctions convexes, elle est aussi convexe.

(vii) $f(x_1, x_2) := 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$,

On a

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 3x_1^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

La fonction $f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2$ est la composée $f_1 = g \circ a_1$, où $g = 3x^2$ (convexe) et $a_1(x_1, x_2) = x_1$ (affine). Également, on a que la fonction $f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ est convexe. Puisque $f = f_1 + f_2$ est la somme de deux fonctions convexes, elle est aussi convexe.

(viii) $f(x_1, x_2) := x_1x_2$,

Cette fonction n'est ni convexe ni concave, mais pour le voir il faut utiliser la définition de convexité : on considère les points

$$P = (1, 1), \quad Q = (-1, -1).$$

On a $f(P) = 1$ et $f(Q) = 1$. On considère d'abord $t = 1/2$, alors

$$(1-t)P + tQ = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (0, 0),$$

et donc $f((1-t)P + tQ) = f(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q) = 0$. D'autre côté, on a

$$(1-t)f(P) + tf(Q) = \frac{1}{2}f(P) + \frac{1}{2}f(Q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ainsi

$$1 = \frac{1}{2}f(P) + \frac{1}{2}f(Q) > f\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q\right) = 0,$$

et on en conclut ne peut pas être concave. Également, si on fait le même calcul avec les points

$$P' = (-1, 1), \quad Q' = (1, -1),$$

on va trouver

$$-1 = \frac{1}{2}f(P') + \frac{1}{2}f(Q') < f\left(\frac{1}{2}P' + \frac{1}{2}Q'\right) = 0,$$

donc la fonction n'est pas convexe.

(ix) $f(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2$.

On peut voir par le même raisonnement que dans le cas précédent, que la fonction n'est ni convexe, ni concave (travailler avec $P = (1, 0)$ et $Q = (-1, 0)$, et $P' = (0, 1)$ et $Q' = (0, -1)$).

Exercice 22.1 (fonctions homogènes)

Les fonctions suivantes sont-elles homogènes ? Si oui préciser le degré d'homogénéité.

1. $f(x) := 3|x|$,

La fonction est homogène de degré 1. En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un cône, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$:

$$f(tx) = 3|tx| = 3t|x| = tf(x).$$

2. $g(x) := \frac{x}{|x|}$,

La fonction est homogène de degré 0. En effet, elle est définie sur $\{x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$ qui est un cône de $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $t > 0$:

$$g(tx) = \frac{tx}{|tx|} = \frac{t}{t} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x|} = g(x).$$

3. $h(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 + x_2}$,

La fonction est homogène de degré 1/2. En effet, elle est définie sur $\mathcal{D}_h = \{x_1 + x_2 \geq 0\}$ qui est un demi-plan qui passe par 0 (donc un cône), et on a pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_h$ et $t > 0$:

$$h(tx_1, tx_2) = \sqrt{tx_1 + tx_2} = \sqrt{t(x_1 + x_2)} = \sqrt{t}\sqrt{x_1 + x_2} = t^{1/2}h(x_1, x_2).$$

4. $f(x_1, x_2) := \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 + x_2}$,

La fonction est homogène de degré -1. En effet, elle est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \{x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x_2 = 0\} \cup \{x_1 + x_2 = 0\}),$$

qui est le complémentaire de deux droites passant par l'origine ($\{x_2 = 0\}$ et $\{x_1 + x_2 = 0\}$), donc un cône. De plus, on a pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_f$ et $t > 0$:

$$f(tx_1, tx_2) = \frac{tx_1}{(tx_2)^2} + \frac{1}{tx_1 + tx_2} = \frac{t}{t^2} \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{t} \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{1}{t} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1 + x_2} \right) = t^{-1}f(x_1, x_2).$$

5. $g(x_1, x_2) := \ln(x_1x_2)$,

La fonction n'est pas homogène. Elle est définie sur $\mathcal{D}_g = \{x_1x_2 > 0\}$ qui est un cône : si (x_1, x_2) satisfait $x_1x_2 > 0$, alors pour tout $t > 0$ on a $(tx_1)(tx_2) = t^2(x_1x_2) > 0$, donc $(tx_1, tx_2) \in \mathcal{D}_g$. Pour vérifier qu'elle n'est pas homogène, on va utiliser l'identité d'Euler. On calcule le gradient :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\ln(x_1x_2)) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\ln(x_1) + \ln(x_2)) = \frac{1}{x_1},$$

et de manière analogue on trouve $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}$. Donc

$$\langle x, \nabla g(x) \rangle = x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} = x_1 \frac{1}{x_1} + x_2 \frac{1}{x_2} = 2.$$

S'il y avait un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'identité d'Euler était satisfaite, on aurait

$$2 = \langle x, \nabla g(x) \rangle = \alpha g(x) = \alpha \ln(x_1 x_2),$$

ce qui est clairement impossible.

6. $h(x_1, x_2) := x_1 \ln(x_1/x_2)$,

La fonction est homogène de degré 1. En effet, on a que la fonction est définie sur $\mathcal{D}_h = \{x_1/x_2 > 0\}$ qui est un cône : si (x_1, x_2) satisfait $x_1/x_2 > 0$, alors pour tout $t > 0$ on a $(tx_1)/(tx_2) = x_1/x_2 > 0$, donc $(tx_1, tx_2) \in \mathcal{D}_h$. Puis, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_h$ et $t > 0$ on a :

$$h(tx_1, tx_2) = tx_1 \ln \frac{tx_1}{tx_2} = tx_1 \ln \frac{x_1}{x_2} = th(x_1, x_2).$$

7. $f(x_1, x_2) := x_1^{\frac{3}{4}} x_2^{\frac{4}{5}}$;

La fonction est homogène de degré $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$.

8. $g(x_1, x_2) := 4x_1^2 + 2x_2 + 6$,

La fonction n'est pas homogène.

9. $h(x_1, x_2) := (\frac{3}{5}x_1^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}x_2^{\frac{1}{2}})^2$.

La fonction est homogène de degré 1.