TD n°1 – Rappels de manipulations algébriques

Le but de cette feuille est de vous faire reprendre familiarité avec la manipulation d'expressions algébriques. Si vous vous réputez suffisamment compétents, quelques exercices suffisent (éventuellement les plus compliqués). En revanche, si vous avez des difficultés avec cette feuille, on vous invite à en faire davantage en consultant d'autres textes ou références en ligne.

Exercice 1.1 (multiplication de polynômes)

(i) $(x^3)^5$;
(ii) $(x+y)(3x^2-xy+4)$;
(iii) $(x^2-2x+y)(x+4y)$;
(iv) $(-xy+3)(x+2)$;
(v) $(x^2+4xy-y)(x-y)$;
(vi) $(x-3y+5)(3x+9y-2)$;
(vii) $(6+x^2)^2$;
(viii) $(4x+y)^2$;
(ix) $(2+x)(3+y)(x-y)$;
(x) $(x-2)(y+x^2)(1+xy)$;
(xi) $(x-1)(1+x+x^2+x^3)$.

Exercice 1.2 (factorisation et racines)

Déterminer les racines réelles (éventuellement en fonction de la variable y) des polynômes suivants et les factoriser.

(i) $4x^2+4x+1$;
(ii) x^2-5x+6 ;
(iii) $2x^2-3x-8$;
(iv) $x^2+4xy+4y^2$;
(v) $x^2-3xy+2y^2$;
(vi) x^3-1 ;
(vii) x^3+y^3 ;
(viii) x^3-2x^2+4x-3 ;
($*$) $4x^3+7x^2-2x-5$;
($*$) $2x^2y-2xy^2+x^2-xy+3x-3y$.

Exercice 1.3 (somme de fractions rationnelles)

(i) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{4}{x+1}$;
(ii) $\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}$;
(iii) $\dfrac{2x+4}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x+1}$;
(iv) $\dfrac{1-y^2}{xy}-\dfrac{x-y^2}{x^2y}$;
(v) $\dfrac{3y}{1+x}-\dfrac{3xy+2}{(1+x)^2}$.

Exercice 1.4 (inégalités)

Décrire l'ensemble des solutions des inégalités suivantes.

(i) $4x+3>\sqrt{2}$;
(ii) $x^2-4x+4>0$;
(iii) $-3x^2+2x+1\leq 0$;
(iv) $\dfrac{x-3}{x+4}\geq 0$;
(v) $x^2-x\geq 1$;
(vi) $3x^2\leq 7$.

TD n°1 – Archives

Exercice 2.1 (manipulations algébriques)
Simplifier les expressions

$$\alpha := x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{4}}; \qquad \alpha := 2t^2 \sqrt{t^{\frac{3}{2}}}\, t^{-3};$$

$$\alpha := \left[1 + (1+t^{-1})^{-1}\right]^{-1}; \qquad \alpha := \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Exercice 2.2 (trinôme du second degré)
On considère le trinôme du second degré $y_m(x) := mx^2 + 2(m-1)x + m - 3$.

1. Pour chacune des valeurs $m := 1$, $m := 2$ et $m := -3$, donner la forme canonique du trinôme, puis tracer sa courbe représentative.
2. Pour quelle valeur de m la courbe de y_m passe-t-elle par le point $(x, y) := (1, 3)$?
3. Calculer le discriminant du trinôme y_m en fonction de m.
4. Calculer la somme et le produit des racines du trinôme y_m en fonction de m (on suppose que les racines existent).

Exercice 2.3 (factorisation des polynômes)

1. Factoriser les polynômes $5x^2 + \frac{9}{2}x + 1$, $20x^2 - 7x - 6$, et $20x^3 - 27x^2 + x + 6$.
2. Factoriser les polynômes $x^3 - 1$, et $x^3 + 1$.
3. Factoriser les expressions $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$, et $x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$.

Exercice 2.4 (sommations)
Donner la valeur des quantités

$$s_1 := \sum_{i=0}^{3} (2i+1)^{-1}; \qquad s_2 := \sum_{i=1}^{7} |4-i|; \qquad s_3 := \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{i}{j}; \qquad s_4 := \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i}.$$

Exercice 2.5 (système d'équations linéaires)
Résoudre le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (m+1)x + y & = & m+3 \\ 3x + (m-1)y & = & -3. \end{array} \right.$$

On explicitera le déterminant du système et on discutera en fonction du paramètre m.

TD n°2 – Fonctions élémentaires

Exercice 3.1 (parties du plan)
Représenter graphiquement ces sous-ensembles du plan $\mathbb{R}^2$ à l'aide de graphes de fonctions élémentaires.

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$;
(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{1/2},\, x \geq 0\}$;
(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x^3|\}$;
(iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^3\}$;
(v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^4 + 5\}$;
(vi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < e^x + 3\}$;
(vii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^{|x|}\}$;
(viii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \ln(|x| + 4)\}$;
(ix) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1,\, x + y \leq 0\}$;
(x) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 5,\, 2x - y = 2\}$;
(xi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y + 1 = 0,\, x + y = -3\}$;
(∗) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \leq 2,\, x - y \geq -1,\, e^{x+3} > y\}$;
(∗) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \leq 1,\, x \geq 0\}$.

Exercice 3.2 (ensembles de définition)
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

(i) $f(x) = \ln(x-1)$;
(ii) $g(x) = x^{1/3} + 27x - 2$;
(iii) $h(x) = (x^2 - 16x)^{1/2} + 42\pi$;
(iv) $k(x) = \sqrt{2 - x^2}$;
(v) $u(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$;
(vi) $v(x) = (\ln(1+x))^{-1}$;
(vii) $w(x) = \ln(1 - e^{3x})$;
(viii) $k_1(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$;
(ix) $k_2(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$;
(x) $f(x,y) = \dfrac{x + 4y + \ln(x + 4y)}{\sqrt{y - e^x}}$;
(∗) $g(x,y) = \ln(\ln(x^2 - 5x + 2 - y))$;
(∗) $h(x,y) = \dfrac{\ln(|x+y| - 2)}{e^{x-y} - 2}$;
(∗) $k(x,y) = (16x^4 - 1)^{1/4} + \dfrac{1}{x+y}$.

TD n°2 – Archives

Exercice 4.1 (Intersection de demi-plans)
Représenter graphiquement l'ensemble

$$\Omega := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ -x_1 + x_2 \leq 1,\ 2x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\right\}.$$

Exercice 4.2 (représentation graphique de fonctions usuelles et de leurs transformées)

1. Représenter géométriquement le graphe des fonctions $x \mapsto x$, x^2, x^3, $x^{\frac{1}{2}}$, x^{-1}.
2. Donner l'allure du graphe des fonctions suivantes

$$f_1(x) := 1 - (x+1)^2; \qquad f_2(x) := 1 + \ln(x-1); \qquad f_3(x) := -1 + e^{x-1};$$
$$f_4(x) := -2 + |x+1|; \qquad f_5(x) := 1 + x + |x|; \qquad f_6(x) := |\ln x|.$$

Exercice 4.3 (domaine de définition des fonctions de deux variables)
Expliciter et représenter géométriquement le domaine de définition des fonctions

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{1 + x_2 - x_1^2}; \quad g(x_1, x_2) := (x_2 + \ln x_1)^{-1}; \quad h(x_1, x_2) := \sqrt{1 + \ln(x_1 + x_2)};$$
$$u(x_1, x_2) := \ln\left[\frac{x_1}{x_2}\right]; \qquad v(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 - \frac{1}{x_1}}.$$

Exercice 4.4 (courbes de niveau des fonctions de deux variables)
Représenter géométriquement les courbes de niveau des fonctions

$$f(x_1, x_2) := x_1 x_2; \qquad g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2; \qquad h(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2.$$

Exercice 4.5 (composition des fonctions)

1. On pose $f(x) := \dfrac{x}{1+x}$ et $g(x) := x^2$. Expliciter $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. On pose $f(x) := x^2$, $g(x) := x^{-1}$ et $h(x_1, x_2) := x_1 + \frac{1}{x_2}$. Expliciter $u := f \circ h$ et $v := g \circ h$.
3. Ecrire chacune des fonctions $f(x) := \ln\sqrt{1 + x^2}$, $g(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $h(x_1, x_2) := \sqrt{x_1}$, comme la composée de 2 ou 3 fonctions.

TD n°3 – Dérivées

Exercice 5.1 (une variable)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(i) $f(x) = \ln(2x+4) + e^{2x}$;

(ii) $g(x) = x^{\pi} + 27x - 2$;

(iii) $h(x) = e^{x}(2x^4 - x)^{1/3} - 17x^{-5}$;

(iv) $k(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$;

(v) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x + 3}{x-2}$;

(vi) $g(x) = \sqrt{\ln(x+5)} - 4\dfrac{2}{x+4}$;

($*$) $h(x) = (x^2+2)e^{\frac{1}{2}x^4 - 1/x} + \frac{1}{32}(4x-3)^8$.

Exercice 5.2 (deux variables)

Calculer le gradient des fonctions suivantes.

(i) $f(x,y) = 2x^2 - xy^3 + 3y^2 + 6xy - 10y^{-1} + 500$;

(ii) $g(x,y) = \ln\dfrac{x+4y}{2x^2+y}$;

(iii) $h(x,y) = \ln(x+3y^2) - ye^{-xy}$;

(iv) $u(x,y) = e^{3x^2-y}(4y+7)^5$;

($*$) $v(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{e^{x} - 3\ln(y-x)}} - 47x^4 + 28$;

($*$) $w(x,y) = ye^{x}\dfrac{xy^3+4}{3y^2-x}$.

TD n°3 – Archives

Exercice 6.1 (dérivation des fonctions d'une variable)
Calculer la dérivée des fonctions

$$
\begin{array}{lll}
f(x) := 3x^{\frac{3}{2}} & g(x) := x^{-3} + x^3 & h(x) := \sqrt{x^2 - 1} \\
f(x) := \ln(\sqrt{1 + x^2}) & g(x) := x^3 e^{\frac{1}{x}} & h(x) := 2^x \\
f(x) := (2x^3 + 1)^5 & g(x) := \ln(1 - e^{3x}) & h(x) := \dfrac{x^5}{(1 + x^3)^2}.
\end{array}
$$

Exercice 6.2 (dérivées partielles des fonctions de deux variables)
Calculer les dérivées partielles des fonctions

$$
\begin{array}{lll}
f(x_1, x_2) := x_1 x_2 & g(x_1, x_2) := 4x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 & h(x_1, x_2) := \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \\
f(x_1, x_2) := 5x_1^{\frac{4}{5}} x_2^{\frac{2}{3}} & g(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & h(x_1, x_2) := (x_1 + 2x_2)/(x_1^2 + x_2^2) \\
f(x_1, x_2) := \ln(x_1 x_2 + x_1^2) & g(x_1, x_2) := x_2 \sqrt{x_1}\, e^{\frac{x_1}{x_2}}. &
\end{array}
$$

Exercice 6.3 (calculs d'élasticité)

1. Calculer l'élasticité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, où α est un paramètre réel.
2. Calculer les élasticités partielles de la fonction $f(x_1, x_2) := x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{3}{4}}$.

TD n°4 – Points critiques

Exercice 7.1

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, dérivées première et seconde, tableau de variation, points critiques et leur nature, allure du graphe).

(i) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

(ii) $g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$;

(iii) $h(x) = \ln|x^2 - 5x + 4|$;

(iv) $k(x) = \dfrac{\ln(3x)}{x}$;

(v) $u(x) = x^2 e^{3x+5}$;

(vi) $v(x) = e^x + 4e^{-x}$.

Exercice 7.2 (deux variables)

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

(i) $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 3y^2$;

(ii) $g(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$;

(iii) $h(x,y) = xy$;

(iv) $k(x,y) = x^2y - x^2 - y$;

(v) $u(x,y) = e^{x^2+y^2}$;

(vi) $v(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + 3y^2}$;

(vii) $w(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$.

TD n°5 – Géométrie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 8.1

Soient $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (0, 3)$, et $\vec{c} = (-4, 2)$.

1. Représenter géométriquement les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.
2. Calculer directement les coordonnées de $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
3. Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
4. Calculer les produits scalaires $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$, $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Exercice 8.2

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{a} = (2, -t + 1, t)$, $\vec{b} = (1 + t, 2t, -3)$.

1. Pour quelles valeurs de t les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires ? Orthogonaux ?
2. Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$.
3. Calculer la distance entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Pour quelle valeur de t est-elle minimale ?

Exercice 8.3

1. Représenter la droite qui passe par $P = (1, 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (0, 1)$. Écrire l'équation de la droite en forme paramétrique.
2. Représenter la droite qui passe par $P = (-1, 2)$ et $Q = (2, 5)$. Expliciter le vecteur directeur. Écrire l'équation de la droite en forme paramétrique.
3. Représenter la demi-droite positive qui passe par $P = (2, 5)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-1, 2)$. Écrire l'équation de la demi-droite en forme paramétrique.
4. Représenter la demi-droite positive qui passe par $P = (-1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (3, 4)$. Écrire l'équation de la demi-droite en forme paramétrique.
5. Représenter le segment qui passe par $P = (0, 4)$ et $Q = (1, 1)$. Écrire l'équation du segment en forme paramétrique.

Exercice 8.4

Déterminer quels ensembles sont convexes et/ou des cônes.

(i) $A = [0, 1]$;
(ii) $B =]1, 2]$;
(iii) $C = [0, +\infty[$;
(iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y \geq 0\}$;
(v) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y \geq 1\}$;
(vi) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$;
(vii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
(viii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$;
(ix) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 2x)(2y + x - 1) = 0\}$;
(x) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + x - 1 = 0\}$.

TD n°5 – Archives

Exercice 9.1 (représentation paramétrique de droites, demi-droites et segments)
Donner une description paramétrique

. de la droite D qui passe par le point $P := (1, 2)$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{d} := (1, -1)$.

. de la demi-droite D_+ issue du point $P := (1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d} := (1, -1)$.

. de la droite Δ qui passe par les points $A := (1, 2)$ et $B := (2, 1)$.

. du segment de droite S qui joint les points $A := (1, 2)$ et $B := (2, 1)$.

Exercice 9.2 (représentation graphique de vecteurs, de droites, demi-droites et segments)
Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont données par $\vec{a} := (-2, 3)$, $\vec{b} := (4, 1)$ et $\vec{c} := (4, 6)$.

1. Construire graphiquement les vecteurs $2\vec{b}$, $-\vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ et $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$.
2. Représenter graphiquement les ensembles

$$D := \{\vec{a} + t\,\vec{b} : \ t \in \mathbb{R}\}\,;$$

$$D_+ := \{\vec{a} + t\,\vec{b} : \ t \geq 0\}\,;$$

$$\Delta := \{(1 + 2t, 1 - 3t) : \ t \in \mathbb{R}\}\,;$$

$$S := \{t\,\vec{a} + (1 - t)\,\vec{c} : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Exercice 9.3 (norme, produit scalaire et distance)
On se donne trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} := (1, -1, 3, 2)$, $\vec{b} := (2, 5, -1, 3)$ et $\vec{c} := (1, 2, 0, -4)$.

1. Calculer $\vec{u} := 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ainsi que $\|\vec{u}\|$.
2. Calculer les quantités $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ainsi que la distance euclidienne entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Que dire de l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

Exercice 9.4 (orthogonalité et colinéarité)
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux vecteurs $\vec{x}(\alpha) := (1, \alpha + 1, 2 - \alpha)$ et $\vec{y}(\alpha) := (2\alpha, 3\alpha + 1, 3\alpha - 1)$ dont les coordonnées dépendent d'un paramètre α. Pour quelle(s) valeur(s) de ce paramètre α :

1. les vecteurs $\vec{x}(\alpha)$ et $\vec{y}(\alpha)$ sont-ils orthogonaux ?
2. les vecteurs $\vec{x}(\alpha)$ et $\vec{y}(\alpha)$ sont-ils colinéaires ? Préciser le coefficient de colinéarité.

TD n°6 – Fonctions sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 10.1 (fonctions linéaires et fonctions affines)

Déterminer quelles fonctions sont affines, et préciser si elles sont aussi linéaires. Si oui, écrire la fonction sous la forme $f(x) = \langle a, x\rangle + c$, où $a \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Si non, justifier la réponse.

(i) $f(x) = 1 + x + x^2$;
(ii) $g(x) = 2 + 3x$;
(iii) $h(x) = \sqrt{x^3 - 1}$;
(iv) $u(x, y) = 2x - 3y$;
(v) $v(x, y) = -x + 10$;
(vi) $w(x, y, z) = x + y - 5z$.

Exercice 10.2 (fonctions convexes et fonctions concaves)

Déterminer si le domaine de définition des fonctions suivantes est convexe. Déterminer quelles fonctions sont convexes ou concaves sur leur domaine de définition. Justifier les réponses.

(i) $f(x) = |x| + 1$;
(ii) $g(x) = \ln x^2$;
(iii) $h(x) = 2\ln x$;
(iv) $k(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;
(v) $u(x, y) = |x + y|$;
(vi) $v(x, y) = e^{|2x-y|}$;
(vii) $w(x, y) = e^{2x-3y+y}$;
(viii) $t(x, y, z) = x^4 + y^2 + z$;
(∗) $s(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$.

Exercice 10.3 (fonctions homogènes)

Déterminer si le domaine de définition des fonctions suivantes est un cône. Déterminer quelles fonctions sont homogènes, et préciser le degré d'homogénéité. Justifier les réponses.

(i) $f(x) = 2|x| - x$;
(ii) $g(x) = x^2 - x$;
(iii) $h(x, y) = \dfrac{x}{y^2 + xy}$;
(iv) $k(x, y) = \dfrac{x}{y^2 - x}$;
(v) $u(x, y) = e^{x/y} + 3$;
(vi) $v(x, y) = x^{1/2}y^{1/3} + xy^{-1/6}$.

TD n°6 – Archives

Exercice 11.1 (fonctions linéaires et fonctions affines)

1. Mettre les fonctions $f_1(x_1, x_2) := 2x_1 + 3x_2$ et $f_2(x_1, x_2) := -x_1 + 5x_2$ sous la forme $f(x) = \langle a, x\rangle$ où a est un vecteur que l'on explicitera.
2. Les fonctions suivantes sont-elles linéaires ? affines ?

$$f(x) := 1 + 2x \qquad f(x) := x^\alpha \qquad f(x) := |x|$$
$$f(x_1, x_2) := x_1 - 3x_2 \qquad f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 + x_2} \qquad f(x_1, x_2) := \ln(x_1/x_2)$$
$$f(x_1, x_2, x_3) := 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4.$$

Exercice 11.2 (fonctions convexes et fonctions concaves)

Etudier la convexité/concavité des fonctions suivantes :

$$f(x) := x^2 - x + e^x \qquad f(x) := \sqrt{x} + \ln x \qquad f(x) := x \ln x$$
$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 + x_2} \qquad f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \qquad f(x_1, x_2) := |x_1| + |x_2|$$
$$f(x_1, x_2) := 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \qquad f(x_1, x_2) := x_1x_2 \qquad f(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2.$$

Exercice 11.3 (fonctions homogènes)

Les fonctions suivantes sont-elles homogènes ? Si oui préciser le degré d'homogénéité.

$$f(x) := 3|x| \qquad g(x) := \frac{x}{|x|} \qquad h(x_1, x_2) := \sqrt{x_1 + x_2}$$
$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 + x_2} \qquad g(x_1, x_2) := \ln(x_1x_2) \qquad h(x_1, x_2) := x_1 \ln(x_1/x_2)$$
$$f(x_1, x_2) := x_1^{\frac{3}{4}} x_2^{\frac{4}{5}} \qquad g(x_1, x_2) := 4x_1^2 + 2x_2 + 6 \qquad h(x_1, x_2) := (\tfrac{3}{5}x_1^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{5}x_2^{\frac{1}{2}})^2.$$