
Examen (session principale – 12/12/2023)

Durée 2h (+ tiers temps). Tout document et objet électronique sont interdits.

Exercice 1 (1,5/1/1/1/0,5=5 pts)

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Déterminer si \mathcal{D}_f est un ensemble convexe.
3. Calculer la dérivée première de f .
4. Étudier le signe de f' et représenter le tableau de variation de f .
5. Déterminer la nature des éventuels points critiques de f (point de maximum local, de minimum local, ou d'inflexion).

Exercice 2 (0,5/1/1/1=3,5 pts)

On considère la fonction

$$u(x, y) = xy^3 - x.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u .
2. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

3. Déterminer les éventuels points critiques de u .
4. Déterminer si la fonction u est homogène.

Exercice 3 (0,5/0,5/0,5/0,5/1=3 pts)

On pose

$$P = (1, 3), \quad Q = (2, 3), \quad \vec{d} = (-1, -1).$$

1. Déterminer le vecteur \vec{PQ} .
2. Calculer la distance euclidienne entre les points P et Q .
3. Donner l'équation paramétrique du segment $[P, Q]$ entre les points P et Q .
4. Donner l'équation paramétrique de la demi-droite D_+ qui part de P et dirigée par \vec{d} .
5. Représenter graphiquement le segment $[P, Q]$ et la demi-droite D_+ .

Exercice 4 (0,5/0,5/1=2 pts)

Soient

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ st \\ s - t \end{pmatrix}.$$

On cherche à déterminer les valeurs de $s, t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires, en suivant les étapes suivantes.

1. Montrer que $\vec{b} \neq \vec{0}$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.
2. Supposons qu'il existe $s, t, k \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{a} = k\vec{b}$. Montrer qu'on doit avoir $t = 0$ ou $s^2 = 1$.
3. Déterminer toutes les valeurs possibles de $s, t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires.

Exercice 5 (1/1=2 pts)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est affine, en justifiant la réponse. (Toute réponse sans justification n'apportera aucun point.)

1. $f(x, y) = \sqrt{xy}$
2. $g(x, y) = 3x - 5y$

Exercice 6 (1/1=2 pts)

1. Donner un exemple de partie de \mathbb{R} qui n'est pas convexe.
2. Donner la définition de fonction convexe

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{où } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Exercice 7 (1,5 pts)

Déterminer les racines du polynôme

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 1.$$

Exercice 8 (1/1=2 pts)

Représenter graphiquement (et séparément) les ensembles suivants.

1. $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -e^{x-1} - 2\}$.
 2. $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq x^2\}$.
-