UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Droit, Sciences Économique et Politique

LICENCE ÉCONOMIE–GESTION
Mathématiques de L'économie
L1/S1, Année 2023/2024

CC n°2 – correction

Exercice 1 (4 pts)

On considère la fonction $g(x, y) = x^2 - y^2 + xy - 2x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$.
   La fonction est polynomiale et à deux variables, donc le domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient ∇g.
   On calcule directement
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2y + x.$$
3. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Crit}(g)$ des points critiques de g.
   Un point $(x, y) \in \mathcal{D}_g$ est un point critique si
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$
   Cela donc correspond au système d'équations
   $$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases}$$
   La deuxième équation donne $x = 2y$, et en substituant dans la première, on trouve
   $$2(2y) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 5y = 2,$$
   donc $y = 2/5$ et $x = 2y = 2 \times (2/5) = 4/5$.

Exercice 2 (4 pts)

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{a} = (1, s - \frac{2}{3})$ et $\vec{b} = (s^2 + 2, s)$.

1. Déterminer les paramètres s tels que $\|\vec{b} - \vec{a}\| = \frac{2}{3}\sqrt{10}$.
   On détermine d'abord le vecteur $\vec{b} - \vec{a}$:
   $$\vec{b} - \vec{a} = \left(s^2 + 2 - 1, s - \left(s - \tfrac{2}{3}\right)\right) = \left(s^2 + 1, \tfrac{2}{3}\right).$$
   On a alors
   $$\left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2 = (s^2 + 1)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = (s^2 + 1)^2 + \tfrac{4}{9}.$$
   On cherche les valeurs de $s \in \mathbb{R}$ telles que
   $$(s^2 + 1)^2 + \tfrac{4}{9} = \left(\tfrac{2}{3}\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow (s^2 + 1)^2 + \tfrac{4}{9} = \tfrac{4}{9} \times 10 \Leftrightarrow (s^2 + 1)^2 = \tfrac{4}{9} \times 10 - \tfrac{4}{9} = \tfrac{4}{9} \times 9 = 4.$$
   Donc il faut résoudre l'équation $(s^2 + 1)^2 = 4$. En passant aux racines carrées des deux côtés, on trouve
   $$s^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow s^2 = 1.$$
   Donc les solutions possibles sont $s = -1$ et $s = 1$.
2. Déterminer les paramètres s tels que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient colinéaires.
   On commence par observer que le vecteur $\vec{a}$ n'est jamais nul, puisque sa première coordonnée est $1 \neq 0$. Donc pour déterminer les valeurs de $s \in \mathbb{R}$ telles que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, on doit chercher s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = k\vec{a}$, ce qui donne le système d'équations
   $$\begin{cases} s^2 + 2 = k \\ s = k\left(s - \tfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$

Ainsi, on peut remplacer la valeur de $k = s^2 + 2$ donnée par la première ligne, dans la deuxième équation, ce qui nous donne

$$s = (s^2 + 2)\left(s - \tfrac{2}{3}\right) = s^3 - \tfrac{2}{3}s^2 + 2s - \tfrac{4}{3},$$

et donc l'équation polynomiale de degré 3 :

$$s^3 - \tfrac{2}{3}s^2 + s - \tfrac{4}{3}.$$

On trouve comme racine évidente $s = 1$:

$$1^3 - \tfrac{2}{3} + 1 - \tfrac{4}{3} = 2 - \tfrac{6}{3} = 2 - 2 = 0.$$

Pour déterminer s'il y a d'autres racines, on factorise donc par $(s-1)$: on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(s-1)(as^2 + bs + c) = s^3 - \tfrac{2}{3}s^2 + s - \tfrac{4}{3}.$$

Le coefficient de s^3 doit satisfaire $1 \times a = 1$, donc $a = 1$. Le terme constant doit satisfaire $-1 \times c = -\frac{4}{3}$, donc $c = \frac{4}{3}$. Ainsi, l'équation précédente dévient

$$(s-1)\left(s^2 + bs + \tfrac{4}{3}\right) = s^3 - \tfrac{2}{3}s^2 + s - \tfrac{4}{3}.$$

Pour déterminer le coefficient b, on regarde les coefficients des termes en s^2 : on doit avoir $-1\times1+1\times b = -\frac{2}{3}$, donc $b = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. On trouve ainsi

$$s^3 - \tfrac{2}{3}s^2 + s - \tfrac{4}{3} = (s-1)\left(s^2 + \tfrac{1}{3}s + \tfrac{4}{3}\right).$$

On regarde ensuite si le trinôme possède des racines, en calculant sont discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 - 4 \times \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{9} - \tfrac{16}{3} < 0.$$

On en déduit que $s = 1$ est la seul solution du système, et donc la seule valeur pour laquelle les deux vecteurs sont colinéaires.

3. Déterminer les paramètres s tels que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient orthogonaux.
   On doit avoir

$$0 = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \times (s^2 + 2) + \left(s - \tfrac{2}{3}\right) \times s = s^2 + 2 + s^2 - \tfrac{2}{3}s = 2s^2 - \tfrac{2}{3}s + 2.$$

Pour déterminer les solutions de l'équation $2s^2 - \frac{2}{3}s + 2 = 0$ on commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 - 4 \times 2 \times 2 = \tfrac{4}{9} - 16 < 0.$$

Donc il n'y a aucune solution, et les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont jamais orthogonaux.

Exercice 3 (3 pts)
On considère la fonction $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 6)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et vérifier si $\mathcal{D}_f$ est un cône.
   La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que le deuxième facteur $x^2 - 4x + 6$ (qui est un polynôme). Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ceci est un cône : si $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ alors $tx \in \mathbb{R}$.
2. Calculer f'.
   On utilise la règle de dérivation d'un produit, et le fait que $(e^x)' = e^x$: $(e^x u)' = e^x u + e^x u' = e^x(u + u')$. Ici $u = x^2 - 4x + 6$, donc $u' = 2x - 4$. On a alors

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 6 + 2x - 4) = e^x(x^2 - 2x + 2).$$

3. Calculer f'' et vérifier si f est convexe ou concave.
   On procède comme dans le as précédent, avec maintenant $u = x^2 - 2x + 2$ et $u' = 2x - 2$, donc

$$f''(x) = e^x(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) = e^x(x^2).$$

Remarquons que le domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est convexe, et que $f''(x) = e^x x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction f est convexe (et pas concave).