
Examen (session de rattrapage – 20/06/2023)

Durée 2h (+ tiers temps). Tout document et objet électronique sont interdits.

Exercice 1 (3 pts)

Représenter graphiquement (et séparément) les ensembles suivants.

1. $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3 - 1\}$.
2. $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 0\}$.
3. $\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x + y) \geq 0, x + y > 0\}$.

Exercice 2 (3 pts)

Soit $u(x, y) = (\ln(x) - 1)^{-1/2} + xe^y - (2e^{xy})^{1/2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de u (sans le représenter graphiquement).
2. Calculer le gradient de u .

Exercice 3 (5 pts)

Soit $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer la dérivée première de f .
3. Calculer la dérivée seconde de f .
4. Étudier le signe de f' et représenter le tableau de variation de f .
5. Déterminer la nature des éventuels points critiques de f (point de maximum local, de minimum local, ou d'inflexion).
6. Déterminer si la fonction est convexe (ou pas) et/ou concave (ou pas) sur son domaine de définition.

Exercice 4 (1 pts)

Soient $P = (0, 3)$ et $Q = (4, 0)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
2. Donner l'équation paramétrique de la droite D qui passe par les points P et Q .

Exercice 5 (3 pts)

Soient

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ s - 2t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ s + 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de $s, t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

Exercice 6 (3 pts)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est affine, en justifiant la réponse. (Toute réponse sans justification n'apportera aucun point.)

1. $f(x, y) = x + y$
2. $g(x, y) = |x| - x + 2y$
3. $u(x) = -10$

Exercice 7 (Questions de cours, 3pts)

1. Il y a exactement 8 sous-ensembles différents de $\mathbb{R}$ qui sont des cônes. Lesquels ?
2. Donner la définition d'une fonction homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Donner un exemple de fonction homogène de degré $-2/3$.