UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Droit, Sciences Économique
et Politique

LICENCE ÉCONOMIE–GESTION
Mathématiques de L'économie
L1/S1, Année 2022/2023

Examen (session principale – 09/12/2022)

Durée 2h (+ tiers temps). Tout document et objet électronique sont interdits.

Exercice 1 (3 pts)

Représenter graphiquement (et séparément) les ensembles suivants.

1. $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.
2. $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
3. $\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(y - x^2) \geq 0\}$.

Exercice 2 (3 pts)

Soit $u(x, y) = \ln(x^2 - y) + e^{2x^2 - y} + 3xy^{4/3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de u (sans le représenter graphiquement).
   L'argument du logarithme doit être strictement positif, donc $\mathcal{D}_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y > 0\}$. (On remarque que la puissance $y^{4/3}$ ne donne pas de restrictions au domaine de définition car le dénominateur est impair.)
2. Calculer le gradient de u.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{x^2 - y} + 4xe^{2x^2 - y} + 3y^{4/3} \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{-1}{x^2 - y} - e^{2x^2 - y} + 4xy^{1/3}
\end{aligned}
$$

Exercice 3 (5 pts)

Soit $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   f est une fonction polynomiale, donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée première de f.
   $f'(x) = 12(x^3 - x^2 + x - 1) = 12(x - 1)(x^2 + 1)$.
3. Calculer la dérivée seconde de f.
   $f''(x) = 12(3x^2 - 2x + 1) = 12(2x^2 + (x - 1)^2)$.
4. Étudier le signe de f' et représenter le tableau de variation de f.
   En regardant la factorisation $f'(x) = 12(x - 1)(x^2 + 1)$, on constate que $f'(x) > 0$ si et seulement si $x - 1 > 0$. Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
5. Déterminer la nature des éventuels points critiques de f (point de maximum local, de minimum local, ou d'inflexion).
   Le point $x = 1$ est le seul point critique, et il s'agit d'un point de minimum local (et en fait global).
6. Déterminer si la fonction est convexe (ou pas) et/ou concave (ou pas) sur son domaine de définition.
   Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, qui est un ensemble convexe. En considérant l'expression $f''(x) = 12(2x^2 + (x - 1)^2)$, on voit que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction est convexe.

Exercice 4 (2 pts)

Soient $P = 1$ et $Q = -3$ deux points de la droite réelle $\mathbb{R}$.

1. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
   $\overrightarrow{PQ} = -3 - 1 = -4$, donc sa norme vaut 4.
2. Donner l'équation paramétrique du segment $[P, Q]$ entre les points P et Q.
   On peut écrire $x = (1 - t)1 + t(-3) = 1 - 4t$, avec $t \in [0, 1]$.

3. Représenter graphiquement le segment $[P, Q]$.
   Il faut représenter l'intervalle $[-3, 1]$ sur la droite réelle.

Exercice 5 (2 pts)
Soient
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s+t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} s-1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs de $s, t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
Remarquons que pour $s = t = 0$, le vecteur $\vec{a}$ est nul, donc il est colinéaire à $\vec{b}$. D'autre part, comme $\vec{b}$ a une coordonné égale à 1, il n'est jamais nul. Deux vecteurs non-nuls sont colinéaires s'il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{a} = k\vec{b}$. Cela devient
$$\begin{cases} s = k(s-1) \\ t = k \\ s+t = kt \end{cases} \qquad \begin{cases} s = t(s-1) \\ t = k \\ s = t^2 - t = t(t-1) \end{cases}$$
En utilisant la première et la dernière équations, on obtient l'équation $t(s-1) = t(t-1)$, et puisque $t = k$ est différent de 0, on peut diviser par t et en déduire $s = t$. En substituant cela dans la première équation, on obtient $s = s(s-1)$, et puisque $s = t = k \neq 0$, on peut diviser par s et en déduire $1 = s-1$, et donc $s = t = 2$. On constate en effet que les vecteurs
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
sont colinéaires.

Exercice 6 (4 pts)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est affine, en justifiant la réponse. (Toute réponse sans justification n'apportera aucun point.)

1. $f(x, y) = xy - y$
   On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$. Ce n'est pas une constante, donc la fonction n'est pas affine.
2. $g(x, y) = 2x - y + 7$
   On a $\nabla g(x, y) = (2, -1)$, qui est une constante. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$, donc la fonction est affine.
3. $u(x) = |x| - 1$
   La fonction n'est pas dérivable en $x = 0$, donc elle ne peut pas être affine.
4. $v(x) = 7x - 1$
   On a $v'(x) = 7$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc la fonction est affine.

Exercice 7 (Questions de cours, 3pts)
1. Il y a exactement 8 sous-ensembles différents de $\mathbb{R}$ qui sont des cônes. Lesquels ?
   $\mathbb{R}, 0,]-\infty, 0], [0, \infty[$, et leur complémentaires $\emptyset, \mathbb{R}^*,]0, \infty[,]-\infty, 0[$.
2. Donner la définition d'une fonction homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un cône. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est homogène de degré α si pour tout $\vec{x} \in \Omega$ et $t > 0$ on a $f(t\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x})$.
3. Écrire l'identité d'Euler, valable pour une fonction homogène dérivable $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
   $\langle \nabla f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \alpha f(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \Omega$.