Présentation du groupe de Lodha-Tatch-Moore

Michele Triestino

7 février 2014

Dans cet exposé nous présentons le travail récent [1] de Yash Lodha et Justin Tatch-Moore.

Comme le titre de l'article [1] l'indique, les deux auteurs définissent un certain groupe qui possède des propriétés remarquables, en étant notamment **non-moyennable**, de **présentation finie** et **sans sous-groupes libres**.

À ce propos, rappelons que le problème « de Von Neumann » vulgarisé par Day dans les années 1950 consiste à exhiber un exemple de groupe non-moyennable et sans sous-groupes libres. Les premières solutions arrivèrent dans les années 1980 avec les monstre de Tarski (Ol'shanskyi) et certains groupes de Burnside (Adyan). La première solution « élégante » au problème de Von Neumann est très récente : elle est due à Nicolas Monod [2] et nous en parlerons plus loin.

Ces solutions n'ont pas suffi à satisfaire entièrement la communauté : est-il possible de trouver des exemples de présentation finie ? Une première réponse affirmative arrive en 2003 (Ol'shanskyi et Sapir), et d'autres plus tard. Il manquait encore l'« élégance » de la solution, au moins jusqu'au travail de Lodha et Tatch-Moore !

Théorème 1 (Lodha)**.** *Le groupe G_0 de homéomorphismes de la droite engendré par*

$$a(t) = t+1, \quad b(t) = \begin{cases} t & \textit{sur }]-\infty, 0], \\ \frac{t}{1-t} & \textit{sur }]0, 1/2], \\ 3 - \frac{1}{t} & \textit{sur }]1/2, 1], \\ t+1 & \textit{sur }]1, +\infty[, \end{cases} \qquad c(t) = \begin{cases} \frac{2t}{1+t} & \textit{sur } [0,1], \\ t & \textit{sur } \mathbf{R} - [0,1], \end{cases}$$

est de présentation finie, non-moyennable et ne contient pas de sous-groupe libre.

Clarifions qu'il s'agit d'un résultat de théorie combinatoire des groupes : le cœur du théorème est la preuve que le groupe est de présentation finie. Les deux autres propriétés sont presque une conséquence du théorème de Monod :

Théorème 2 (Monod)**.** *Soit $A \neq \mathbf{Z}$ un sous-anneau de $\mathbf{R}$ (par exemple $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$) et $H(A)$ le groupe des homéomorphismes de la droite réelle qui sont $PSL_2(\mathbf{R})$ par morceaux. Le groupe $H(A)$ est non-moyennable et ne contient pas de sous-groupe libre.*

Remarque 1. Le groupe G_0 est contenu dans $H(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])$ et contient le groupe de Thompson $F = \langle a, b \rangle$.

Le plan de la présentation est le suivant : nous rappellerons dans un premier temps la preuve du théorème de Monod, dans le cas particulier du groupe de Lodha et Moore. La deuxième partie sera dévouée à démontrer que ce groupe est de présentation finie.

1 En parcourant la preuve de Monod

L'originalité de [2] est d'avoir bien compris comment employer deux méthodes de preuve « classiques » : la preuve de la non-moyennabilité se pose sur un résultat de Carrière et Ghys, alors que pour montrer qu'il n'y a pas de sous-groupes libres, Monod reprend la preuve que Brin et Squier utilisent pour des groupes d'homéomorphismes linéaires par morceaux.

Soit X un espace mesuré et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurable à classes dénombrables. Par exemple, la relation d'équivalence associée à l'action mesurable d'un groupe dénombrable Γ.

Définition 1. *La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est dite* moyennable *s'il existe une application mesurable $x \mapsto m_x$, où m_x est une moyenne sur $\ell^\infty([x])$ telle que $x\mathcal{R}y \Rightarrow m_x = m_y$.*

Ici, « mesurable » veut dire que pour toute fonction $f \in L^\infty(X)$, la fonction $x \mapsto m_x(f\big|_{[x]})$ soit mesurable.

Exemple 1. Si Γ est un groupe moyennable, la relation d'équivalence associée à toute action de Γ est moyennable. En effet, si $m \in \ell^\infty(\Gamma)$ est une moyenne invariante, il suffit de poser $m_x = (ev_x)_*(m)$, où $ev_x : \Gamma \longrightarrow X$ est l'application $g \mapsto g.x$ (on pousse la moyenne sur l'espace).

Cela donne un critère de non-moyennabilité non trivial.

Théorème 3 (Carrière-Ghys)**.** *Soit $\Gamma \subset PSL_2(\mathbf{R})$ un sous-groupe dénombrable dense. L'action de Γ sur $\mathbf{P}^1$ induit une relation d'équivalence orbitale qui n'est pas* Leb*-moyennable.*

Dans [2], une étude dynamique permet de voir que les $PSL_2(A)$-orbites sur $\mathbf{P}^1$ sont contenues dans les $H(A)$-orbites, et donc la relation d'équivalence orbitale induite par $H(A)$ n'est pas Leb-moyennable. Le point principal est que les points fixes des nord-sud de $PSL_2(A)$ sont beaucoup.

En revanche, dans [1] cette conclusion arrive par des considérations plus combinatoires.

Proposition 4. *Les orbites de $G_0 = \langle a, b, c\rangle$ agissant sur $[0, 1]$ sont presque partout (disons sur $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$) les mêmes que pour l'action du groupe Γ engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Des calculs montrent que $g = bca^{-1}c^{-1}a$ coïncide avec $2t$ sur $[0, 1]$ (faire attention à composer du bon coté : on fait agir en premier l'élément le plus à gauche). En composant par les bonnes puissances de a, on trouve un élément qui agit comme $2t$ sur chaque intervalle de la forme $[m, m + 1]$: en effet pour tout $r \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$ on a $2(r - n) + 2n = 2r$. On en conclut que les orbites de G_0 contiennent les orbites de l'action de $\langle t + 1, 2t\rangle$ sur $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Il reste à retrouver l'orbite de $-1/t$. Observons que aba et ba^{-3} coïncident avec $-1/t$ sur $[-1, -1/2]$ et $[1/2, 1]$ respectivement. Ces deux intervalles sont un domaine fondamentale pour l'application $2t$ et on a $(2^n)(-1/(2^n r)) = -1/r$. □

Le fait que G_0 ne contient pas de sous-groupe libre est un corollaire direct du théorème de Monod, puisque $G_0 \leq H(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])$. Rappelons brièvement la preuve de Brin et Squier pour un groupe H d'homéomorphismes linéaires par morceaux de l'intervalle [4].

Théorème 5 (Brin-Squier)**.** *Tout sous-groupe non-abélien de H contient un sous-groupe abélien libre de rang infini.*

Démonstration. On peut supposer que H soit engendré par deux éléments f et g qui ne commutent pas. On fera l'assomption que l'ensemble

$$\{r \in \mathbf{R} \,:\, f(r) \text{ ou } g(r) \neq r\}$$

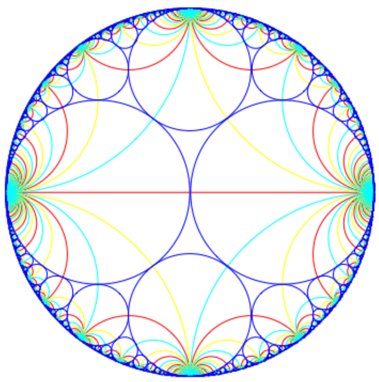
soit un intervalle $]s,t[$. On montre d'abord que s et t sont les seuls points d'accumulation de $[s,t]$ sous l'action de H.

Supposons par l'absurde que pour un certain $x \in]s,t[$ on puisse trouver $s < r$ tel que $r = \min \overline{H.x}$. Supposons $f(r) < r$, alors par continuité de f il existe un voisinage U de r tel que $f(U) < U$, absurde.

Prenons maintenant $h = [f,g] \neq 1$ qui est l'identité au voisinage de $\{s,t\}$. On peut alors trouver un élément k de H tel que le support de h soit envoyé par conjugaison dans un intervalle disjoint de lui-même. Donc h et khk^{-1} commute et on peut répéter cet argument *ad libitum*. $\square$

Lorsque on souhaite montrer un résultat similaire pour $H(\mathbf{R})$, il faut faire attention à prendre un mot dans le deuxième groupe dérivé pour obtenir un élément non-trivial qui a un support *strictement* contenu dans la réunion des supports de f et g.

2 Le diagramme de Farey et l'application de Minkowski



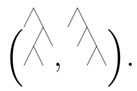
Les mathématiciens habitués à travailler avec les fractions continues pensent que la droite projective réelle ne diffère pas trop d'un arbre. Vous avez déjà vu, peut-être, le diagramme de Farey : en partant des points $-1/0$, $0/1$ et $1/0$ (qui coïncide projectivement avec $-1/0$), on rajoute des points intermédiaires à cette liste en faisant les additions comme un mauvais élève : entre p/q et r/s on rajoutera le sommet $(p+r)/(q+s)$. En choisissant de mettre l'origine en $0/1$, on peut coder tout nombre réel par une suite infinie de $\mathtt{0}$ et $\mathtt{1}$. Ce codage n'est pas bijectif (de même manière que l'écriture décimale n'est pas unique). Plus précisément l'*application de Minkowski* est définie par $\phi : \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ qui à une suite ξ associe

$$\phi(\xi) = \begin{cases} [r_0, r_1, r_2, \ldots] & \text{si } \xi = \mathtt{1}^{r_0+1}\mathtt{0}^{r_1}\mathtt{1}^{r_2}\cdots, \\ -[r_0, r_1, r_2, \ldots] & \text{si } \xi = \mathtt{0}^{r_0+1}\mathtt{1}^{r_1}\mathtt{0}^{r_2}\cdots. \end{cases}$$

On remarquera que $\phi(s\mathtt{0}\overline{\mathtt{1}}) = \phi(s\mathtt{1}\overline{\mathtt{0}})$ et $\phi(\overline{\mathtt{0}}) = \phi(\overline{\mathtt{1}}) = \infty$.

À partir de ce moment nous allons oublier la droite réelle et raisonnerons toujours en termes de transformations de l'*arbre de Farey*. Des vérification assez élémentaires montrent que les éléments a et b sont des transformations très célèbres :

$$\xi.a = \begin{cases} \mathtt{0}\eta & \text{si } \xi = \mathtt{00}\eta, \\ \mathtt{10}\eta & \text{si } \xi = \mathtt{01}\eta, \\ \mathtt{11}\eta & \text{si } \xi = \mathtt{1}\eta \end{cases} = \Big(\quad , \quad \Big),$$

$$\xi.b = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi = 0\eta, \\ 1(\eta.a) & \text{si } \xi = 1\eta \end{cases} =$$


Dans la suite nous noterons $a = x$ et $b = x_1$ La raison de ce changement de notation sera plus claire dans un instant.

Un peu plus élaborée est le codage de l'action de c. Pour simplicité, nous allons considérer un autre élément y tel que $G_0 < G = \langle a, b, y \rangle$. La transformation y est définie par

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{2} & \text{sur }]-\infty, -1], \\ \frac{1+t}{1-t} & \text{sur }]-1, 0], \\ 2t+1 & \text{sur }]0, +\infty[\end{cases}$$

et correspond à l'application définie récursivement par

$$\xi.y = \begin{cases} 0(\eta.y) & \text{si } \xi = 00\eta, \\ 10(\eta.y^{-1}) & \text{si } \xi = 01\eta, \\ 11(\eta.y) & \text{si } \xi = 0\eta. \end{cases}$$

La représentation par des arbres est presque la même que pour a, sauf que les sous-arbres attachés aux feuilles sont transformés par y, y^{-1} et y respectivement, au lieu que par l'identité.

Soit $s \in \{0, 1\}^{fin}$ un mot fini, nous définissons aussi les transformations x_s et y_s par

$$\xi.x_s = \begin{cases} s(\eta.x) & \text{si } \xi = s\eta, \\ \xi & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \xi.y_s = \begin{cases} s(\eta.y) & \text{si } \xi = s\eta, \\ \xi & \text{sinon.} \end{cases}$$

En d'autres termes, x_s et y_s agissent comme x et y respectivement sur le sous-arbre attaché à la feuille de l'arbre dyadique étiquetée par s. On peut vérifier que c correspond à y_{10}.

Exemple 2. Les générateurs classiques x_n du groupe de Thompson $F = \langle a, b \rangle$ correspondent à x_{1^n}. En particulier $b = x_1$.

Exemple 3. La définition récursive de y peut aussi s'exprimer sous la forme

$$y = xy_0 y_{10}^{-1} y_{11}. \tag{1}$$

3 Présentations

L'exemple précédent montre que F est engendré par les x_s, avec le système de relations

$$\text{si } t.x_s \text{ est défini, alors } x_t x_s = x_s x_{t.x_s}. \tag{2}$$

Exemple 4. Pour être encore plus certains de l'affirmation précédente, prenons $x_n = x_{1^n}$ et $x_k = x_{1^k}$ avec $k < n$. Alors $x_n x_k = x_k x_{1^n.x_k}$ et

$$1^n.x_{1^k} = 1^k(1^{n-k}.x) = 1^k 1^{n-k+1} = 1^{n+1},$$

donc $x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1}$.

Il est bien connu que pour F le système de relations (2) se réduit à $[a^{-1}b, aba^{-1}] = id$, et $[a^{-1}b, a^2ba^{-2}] = id$ que l'on peut écrire sous la forme

$$x_1^{-1}x^{-1}x_1xx_1 = x^{-2}x_1x^2, \quad x_1^{-1}x^{-2}x_1x^2x_1 = x^{-3}x_1x^3. \tag{3}$$

On notera X l'ensemble $\{x_s\}_{s \in \{0,1\}^{fin}}$. De même, Y dénotera l'ensemble $\{y_s\}_{s \in \{0,1\}^{fin}}$. On utilisera aussi l'ensemble Y_0 qui est constitué des y_s avec $s \in \{0, 1\}^{fin}$ non constant : on peut vérifier que ces y_s arrivent comme conjugués de y_{10} par un élément de F.

Théorème 6 (Lodha)**.** *Les groupes G et G_0 sont de présentation finie, non-moyennables et sans sous-groupes libres.*

Nous allons d'abord introduire des listes *infinies* R et R_0 qui sont de relations suffisantes pour G et G_0 (on passera à la preuve dans la partie suivante).

L'ensemble R est constitué des groupes de relations suivants dans le système de générateurs $S = X \sqcup Y$:

($R1$) si $t.x_s$ est défini, alors $x_t x_s = x_s x_{t.x_s}$,

($R2$) si $t.y_s$ est défini, alors $y_t x_s = x_s y_{t.x_s}$,

($R3$) si s et t sont incompatibles (s n'est pas un sous-mot de t et réciproquement), alors $y_t y_s = y_s y_t$,

($R4$) $y_s = x_s y_{s0} y_{s10}^{-1} y_{s11}$.

L'ensemble R_0 est le sous-ensemble de R formé des mots qu'on peut écrire en employant uniquement des éléments dans $S_0 = X \sqcup Y_0$.

La dernière partie sera consacrée à montrer que l'on peut trouver une liste *finie* de relations dans R et R_0.

4 Suffisance des relations

Dans cette partie nous parcourons les arguments centraux de [1]. Elle se divisent essentiellement en deux temps : d'abord on montrera que tout mot peut se mettre en *forme standard* (mais pas de façon unique), et après cette partie de préparation, on montrera que tout mot en forme standard peut s'écrire comme un mot *suffisamment étendu*.

Définition 2. *Un S-mot Ω est en* forme standard *si*

1. *il est la concaténation d'un X-mot suivi par un Y-mot,*
2. *si $\Omega(i) = y_s^m$ et $\Omega(j) = y_t^n$ avec $s \subset t$, alors $j \leq i$.*

La profondeur *d'une forme standard Ω est le l minimal tel qu'il existe un mot s de longueur l tel que y_s est dans Ω. Un X-mot est de profondeur infinie.*

Exemple 5. Le mot $xy_{110}y_1^{-2}$ et en forme standard, mais pas son inverse. Sa profondeur est 3.

La proposition suivante dit que tout mot peut s'exprimer en forme standard de profondeur arbitraire.

Proposition 7. *Soit Ω un S-mot et $l \in \mathbf{N}$. Alors il existe une transformation $\Omega \longrightarrow \Omega'$ telle que Ω' est de profondeur au moins l.*

Définition 3. *Soit Ω une forme standard telle que y_s est dans Ω. On dit que s est* exposé *dans Ω s'il existe $u \supset s$ tel que si t est compatible avec u et y_t est dans Ω, alors $t \subset s$. Dans ce cas, on dit que u en est* témoin.

Exemple 6. Dans le mot $y_{11}y_1$, 1 est exposé puisque $u = 10$ en est témoin. En revanche, $u = 1$ n'en est pas témoin, puisque 11 est compatible avec 1 mais 11 n'est pas un préfixe de 1.

Dans le mot $y_{11}y_{10}y_1$, 1 n'est pas exposé.

Définition 4. *Une forme standard Ω est* suffisamment étendue *si lorsque y_s est dans Ω et s n'est pas exposé dans Ω, alors :*

1. *si y_s apparaît avec un exposant positif, alors y_{s0} est dans Ω,*
2. *si y_s apparaît avec un exposant négatif, alors y_{s1} est dans Ω.*

Motivons cette définition : si la forme standard Ω n'est pas suffisamment étendue, et un certain $\Omega(i) = y_s^n$, $n > 0$ en est la raison, alors on peut appliquer la substitution

$$y_s^n = x_s y_{s0} y_{s10}^{-1} y_{s11} y_s^{n-1}$$

pour s'assurer que si y_t apparaît avant y_s, alors $t.x_s$ est défini. De même, si $n < 0$, on appliquera la substitution

$$y_s^n = x_s^{-1} y_{s00}^{-1} y_{s01} y_{s1}^{-1} y_s^{n+1}.$$

Proposition 8. *Si Ω est une forme standard, alors il existe une forme standard suffisamment étendue qui peut être dérivée de Ω.*

Avant de démontrer ces deux proposition, nous terminerons la preuve du fait que les relations R sont suffisantes.

Définition 5. *Soit $B = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, y, y^{-1}\}$ et B^{fin} l'ensemble des mots finis en B. Si Λ est un mot en B et $\Lambda(i)$ est soit y soit y^{-1}, on dira que $\Lambda(i)$ est une* occurrence de $y^{\pm}$.

On utilisera les B-mots pour évaluer les formes standard sur des suites. La définition récursive de y suggère la définition suivante :

Définition 6. *Soit Λ un B-mot. L'application d'une transformation du type*

$$y\mathtt{00} \longrightarrow \mathtt{0}y, \quad y\mathtt{01} \longrightarrow \mathtt{10}y^{-1}, \quad y\mathtt{1} \longrightarrow \mathtt{11}y,$$
$$y^{-1}\mathtt{01} \longrightarrow \mathtt{00}y^{-1}, \quad y^{-1}\mathtt{10} \longrightarrow \mathtt{01}y, \quad y^{-1}\mathtt{11} \longrightarrow \mathtt{1}y^{-1},$$

sur une occurrence de $y^{\pm}$ avance *ce symbol. Si plusieurs avancements d'occurrences de $y^{\pm}$ sont appliqués sur Λ pour obtenir Λ', on dira que Λ peut être* avancé jusqu'à Λ' *($\Lambda \longrightarrow \Lambda'$).*

Définition 7. *Soit Λ un B-mot. Un occurrence de $y^{\pm}$ est une* élision potentielle *si par avancements successifs, on le trouve dans un sous-mot de la forme yy^{-1} ou $y^{-1}y$.*

Lemme 9. *Soit Λ un B-mot qui ne contient aucune élision potentielle. Alors en avançant une occurrence de $y^{\pm}$, on trouve un nouveau mot Λ' sans élisions potentielles.*

Démonstration. Supposons que dans Λ' il y ait une élision potentielle. Alors on doit trouver $i > 1$ tel que l'élision potentielle se trouve à la $(i-1)$-ième occurrence de $y^{\pm}$ dans Λ'. En revenant sur Λ, on peut avancer le plus possible la $(i-1)$-ième occurrence de $y^{\pm}$ pour produire Λ''. Supposons par exemple que l'on a avancé cette occurrence jusqu'à obtenir un y. Alors le symbol suivant est soit $\mathtt{0}$, soit y. On peut alors mener une étude cas par cas :

$$yy\mathtt{00} \longrightarrow y\mathtt{0}y,$$
$$yy\mathtt{01} \longrightarrow y\mathtt{10}y^{-1} \longrightarrow \mathtt{11}y\mathtt{0}y^{-1},$$
$$yy\mathtt{1} \longrightarrow y\mathtt{11}y \longrightarrow \mathtt{1111}yy,$$

et cætera. En examinant tous les cas possibles on trouve une contradiction. □

Lemme 10. *Soit Λ un B-mot qui ne contient pas d'élision potentielle. Alors il existe deux suites binaires u, s telles que Λu peut être avancé jusqu'à sy^n, avec n égal au nombre d'occurrences de $y^{\pm}$ dans Λ.*

La preuve du lemme se fait par récurrence. La proposition suivante permet de terminer la preuve du théorème, en comparant l'action de G avec celle de F.

Proposition 11. *Soit Ω une forme standard suffisamment étendue qui n'est pas un X-mot. Alors Ω n'est pas représenté par un X-mot dans G.*

Pour terminer la preuve, supposons que Ω soit un S-mot qui est trivial dans G. Par les propositions 7 et 8, on peut supposer que Ω soit en forme standard et suffisamment étendue. Par la proposition 11, on a alors que Ω doit être représenté par un X-mot. Puisque R contient les relations de F, on peut terminer la preuve.

4.1 Mise en forme standard

Nous allons démontrer dans cette partie la proposition 7.

Montrons d'abord que l'on peut trouver des formes standard pour $y_s^{\pm 1}$.

Lemme 12. *Pour toute suite s et $l \in \mathbf{N}$, il existe une forme standard Ω pour $y_s^{\pm 1}$ telle que :*

1. *si x_u ou y_u apparaît dans Ω, alors u étend s,*
2. *si y_u apparaît dans Ω, alors $|u| \geq l$ et l'exposant de y_s est ± 1,*
3. *si y_u et y_v apparaissent dans Ω et $u \neq v$, alors u et v sont incompatibles.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $l - |s|$. On supposera que l'exposant de y_s soit positif.

Supposons $l - |s| > 0$, alors on applique le changement $y_s \longrightarrow x_s y_{s0} y_{10}^{-1} y_{11}$ et par hypothèse de récurrence on trouve Ω_{s0}, Ω_{s10}, Ω_{s11} qui satisfont les conclusions du lemme pour y_{s0}, y_{s10}^{-1}, et y_{s11} respectivement, avec la même valeur de l. En utilisant la propriété 1, on peut opérer des transformations du type $y_v x_u \longrightarrow x_u y_v$ si u et v sont incompatibles, pour avoir les éléments x_u comme préfixe. □

Le prochain lemme est de nature technique, il décrit les changements sur une forme standard lorsque l'on passe un X-mot de la droite vers la gauche.

Lemme 13. *Si Ξ est un X-mot, alors il existe l_0 tel que si Ω est une forme standard de profondeur $l \geq l_0$, alors $\Omega\Xi \longrightarrow \Omega'$, avec Ω' de profondeur au plus $l - k$, avec $k = |\Xi|$.*

Démonstration. Il suffit de le faire pour $\Xi = x_s^{\pm 1}$. Si t est une suite de longueur au moins $l + 2$, alors $t.x_s^{\pm 1}$ est défini et sa longueur diffère de celle de t au plus de 1. On opère plusieurs fois la transformation $y_t^i x_s^{\pm 1} \longrightarrow x_s^{\pm 1} y^i_{t.x_s^{\pm 1}}$. □

Preuve de la proposition 7. La preuve se fait par double récurrence : sur la longueur n du mot Ω et sur l.

Si $n = 1$ on a déjà obtenu le résultat dans le lemme 12. Quitte à décomposer une puissance du même élément, on peut supposer d'écrire $\Omega = \Omega_0\Omega_1$ avec Ω_i de longueur positive.

Par hypothèse inductive, on peut écrire $\Omega_1 \longrightarrow \Xi\Upsilon$, avec Ξ et Υ qui sont X- et Y-mots respectivement, et Υ a profondeur l. Soit $k = |\Xi|$, et $m \geq l$ tel que si y_u apparaît dans Υ, $|u| < m$. Par hypothèse inductive, on peut trouver Ω_0' de profondeur au moins $m + k$ tel que $\Omega_0 \longrightarrow \Omega_0'$. Par le lemme 13 on trouve $\Omega_0'\Xi \to \Omega_0''$, avec Ω_0'' forme standard de profondeur au moins m. Pour résumer on a trouvé :

$$\Omega \longrightarrow \Omega_0\Omega_1 \longrightarrow \Omega_0\Xi\Upsilon \longrightarrow \Omega_0'\Xi\Upsilon \longrightarrow \Omega_0''\Upsilon$$

Pour terminer, on observe que puisque la profondeur de Ω_0'' est au moins m, $\Omega' = \Omega_0''\Upsilon$ est une forme standard de profondeur au moins l de manière évidente. □

4.2 Mise en forme suffisamment étendue

Nous allons démontrer dans cette partie la proposition 8.

L'idée est de définir un ordre partiel $\lhd$ sur l'ensemble des formes standard de sorte que

1. lorsque on *étend* un mot qui n'est pas suffisamment étendu, on obtient un mot *strictement plus petit*,
2. toute suite strictement décroissante est finie.

Définition 8. *Soit Ω un S-mot et $T(\Omega)$ le préfixe minimal T tel que*

— *si y_t apparaît dans Ω, alors t a une extension dans T.*

Si Ω_0 et Ω_1 sont deux formes standard, on pose $\Omega_0 \lhd \Omega_1$ si

— *$|T(\Omega_0)| < |T(\Omega_1)|$ ou $|T(\Omega_0)| = |T(\Omega_1)|$ et $|k_0| < |k_1|$, où k_i est l'exposant dans Ω_i du s $\leq_{\text{lex}}$-maximal tel que y_s apparaît dans au moins l'un des Ω_0 ou Ω_1 et pour lequel $k_0 \neq k_1$*

On remarquera que pour un certain m fixé, il existe seulement un nombre *fini* de préfixes de longueur m. Donc toute suite strictement décroissante est finie.

Preuve de la proposition 8. Soit Ω une forme standard non suffisamment étendue, témoigné par $\Omega(i) = y_s^n$. Pour simplicité, on va supposer $n > 0$. On applique la transformation

$$y_s^n \longrightarrow x_s y_{s0} y_{s10}^{-1} y_{s11} y_s^{n-1}$$

(si $n = 1$, alors on n'écrit pas y_s^{n-1}), que l'on fait suivre par des substitutions de la forme $y_t^m x_s \to x_s y_{t.x_s}^m$ pour mettre x_s à gauche. On note Ω' le résultat final de ces opérations. **On doit mettre Ω' en forme standard Ω''.**

— Remarquons que la seule raison pour que Ω' ne soit pas en forme standard, est d'avoir introduit des occurrences de y_{s0}, y_{s10}, et y_{s11}.

— Observons que y_{s1} ne peut pas apparaître dans Ω' : alors on aurait que $s1$ est égal à $t.x_s$ pour un certain t tel que $t.x_s$ est défini, impossible (voir la définition de x).

— En outre, si y_t est dans Ω' et t étend proprement l'une des suites $s0$, $s10$, ou $s11$, alors y_t doit se trouver avant toute occurrence de y_{s0}, y_{s10}, ou y_{s11} dans Ω'.
De même, si t est un préfixe propre de $s0$, $s10$, et $s11$ et y_t apparaît dans Ω', alors t est un préfixe de s et donc on trouve l'occurrence après l'endroit de la substitution.

On peut donc utiliser une substitution de la forme $y_u y_v \leftrightarrow y_v y_u$ pour u et v incompatibles, pour bouger deux occurrences distinctes de y_{s0}, y_{s10}, ou y_{s11} au même endroit Ω', pour obtenir enfin un mot Ω'' en forme standard. **On montre maintenant que $\Omega'' \lhd \Omega$.**

— Vérifions d'abord que $|T(\Omega)| = |T(\Omega')|$, et plus précisément que $T(\Omega') = \{t.x_s : t \in T(\Omega)\}$.
Puisque s n'était pas exposé dans Ω, chaque $s00$, $s01$, et $s1$ a une extension dans $T(\Omega)$: on est en train de supposer que y_{s0} n'apparaît pas dans Ω (sinon le mot serait déjà suffisamment étendu). On trouve alors que $t.x_s$ est défini pour tout élément t de $T(\Omega)$. Donc l'affirmation.

Si y_s apparaît dans Ω'', il se trouve aussi dans Ω' donc toute suite dans $T(\Omega'')$ possède une extension dans $T(\Omega')$. On en déduit

$$|T(\Omega'')| \leq |T(\Omega')| = |T(\Omega)|,$$

Supposons que l'on ait *égalité*, alors s est une suite $\leq_{\text{lex}}$-maximale dans le sens que l'exposant de y_s dans Ω et Ω'' diffère et dans ce cas il décroit en valeur absolue de 1. Donc $\Omega'' \lhd \Omega$. $\square$

4.3 Comparaison avec les mots « Thompson »

Nous allons démontrer dans cette partie la proposition 11.

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition lorsque Ω est une forme standard suffisamment étendue qui est un Y-mot de longueur positive.

Soit $g : 2^{\mathbf{N}} \longrightarrow 2^{\mathbf{N}}$ le représentant de Ω dans G.

— Il suffit de construire deux suites finies u et v telles que

$$g(u\xi) = vy^n(\xi),$$

pour quelque $n > 0$. On choisira alors $\xi = \overline{\mathtt{0}^{2^n}\mathtt{1}}$, puisque $y^n(\xi) = \overline{\mathtt{0}\mathtt{1}^{2^n}}$ (les queues ne seront donc pas équivalentes).

On va construire u de manière itérative.

Première étape. $u|_{i_0}$ est défini par la dernière lettre de $\Omega = \widetilde{\Omega} y^n_{u|_{i_0}}$.

Récursion. $u|_i$ est défini tel que $y_u|_i$ est dans Ω.

1. Si $u|_i$ est exposé dans Ω on termine.
2. Sinon, soit $y_{(u|_i)\mathtt{0}}$ est dans Ω (si $y_{u|_i}$ est positif) et dans ce cas on pose $u(i) = \mathtt{0}$. Ou bien $y_{(u|_i)\mathtt{1}}$ est dans Ω (si $y_{u|_i}$ est négatif) et dans ce cas on pose $u(i) = \mathtt{1}$.

Soit ℓ la dernière étape. On a obtenu $u|_\ell$. On construit le B-mot Λ qui correspond à intercaler y^n après un $u|_i$ si $y^n_{u|_i}$ est dans Ω :

$$\Lambda = u|_{i_0} y^{n_0} \epsilon_1 y^{n_1} \cdots \epsilon_k y^{n_k},$$

avec $n_i > 0$ si et seulement si $\epsilon_{i+1} = \mathtt{0}$.

On peut vérifier qu'il n'y a pas d'élisions potentielles. Donc il existe une suite s finie telle que Λs peut être avancée jusqu'à vy^n, avec $n = \sum |n_i|$. On pose $u = u|_\ell s$.

Vérification. Soit $g = y^{m_k}_{t_k} \cdots y^{m_1}_{t_1}$, on évalue sur u. Par construction cela se fait très facilement.

□

5 Une collection finie

Proposition 14. *Le groupe G est engendré par les éléments $\{x, x_\mathtt{1}, y_\mathtt{0}, y_\mathtt{1}, y_\mathtt{10}\}$, et un nombre fini de relations entre ces éléments suffit pour présenter G.*

Proposition 15. *Le groupe G_0 est engendré par les éléments $\{a, b, c\} = \{x, x_\mathtt{1}, y_\mathtt{10}\}$, et un nombre fini de relations entre ces éléments suffit pour présenter G_0. (Et on peut trouver une liste de seulement neuf relations !)*

Introduisons les lettres auxiliaires

$$y = xy_\mathtt{0}y_\mathtt{1}^{-1}y_\mathtt{10}, \quad x_\mathtt{0} = x^2x_\mathtt{1}^{-1}x^{-1}, \quad x_\mathtt{10} = x_\mathtt{1}^2x^{-1}x_\mathtt{1}^{-1}xx_\mathtt{1}^{-1},$$

$$x_{\mathtt{0}^{n+1}} = x^n x_\mathtt{0} x^{-n}, \quad x_{\mathtt{1}^{n+1}} = x^{-n}x_\mathtt{1}x^n,$$

$$y_{\mathtt{0}^{n+1}} = x^n y_\mathtt{0} x^{-n}, \quad y_{\mathtt{1}^{n+1}} = x^{-n}y_\mathtt{1}x^n,$$

pour simplifier les notations. Pour tout $s \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^{fin}$ non-constant, et mot f_s en $\{x, x_\mathtt{1}\}$ qui porte $\mathtt{10}$ sur s (i.e. $\mathtt{10}.f_s = s$), on pose aussi

$$x_s = f_s^{-1}x_\mathtt{10}f_s, \quad y_s = f_s^{-1}y_\mathtt{10}f_s.$$

On a déjà remarqué que les relations ($R1$) et ($R4$) se réduisent à une liste finie si l'on conjugue par des éléments de F (plus précisément à cinq relations). Montrons maintenant que les relations ($R3$) se reconduisent aussi à une liste finie. Ceci se fait par le lemme suivant (on peut le démontrer à la main par récurrence) :

Lemme 16. *Si $u <_{\text{lex}} v$ sont deux mots incompatibles, alors il existe $g \in F$ et $s <_{\text{lex}} t$, les deux de longueur au plus 3, tels que $s.g = u$ et $t.g = v$.*

En utilisant aussi que les deux relations (3) suffisent pour présenter F, on déduit du lemme précédent que toute relation du type $(R3)$ peut s'exprimer, en conjuguant par un élément de F, comme une relation du type $(R3)$ avec s et t de longueur au plus 3.

Les relations du groupe $(R2)$ peuvent s'exprimer comme $y_s g = g y_s$ avec $s \in \{\mathtt{0}, \mathtt{10}, \mathtt{1}\}$ et $g \in F$ tel que $s.g = s$. Ensuite on retrouve cette dernière liste par les relations $y_s x_t = x_t y_s$, avec s, t mots quelconque de longueur au plus 3.

Références

[1] Yash Lodha & Justin Tatch-Moore. A geometric solution to the Von Neumann-Day problem for finitely presented groups. Preprint arXiv:1308.4250v2

[2] Nicolas Monod. Groups of piecewise projective homeomorphisms. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **110**, no. **12** (2013), 4524–4527.

[3] Yves Carrière & Étienne Ghys. Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Série 1 Math.* **300**, no. **19** (1985), 677–680.

[4] Matthew G. Brin & Craig C. Squier. Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line. *Invent. Math.* **79**, no. **3** (1985), 485–498.