La conjecture de Zimmer (d'après Brown, Fisher, et Hurtado)

• M. Triestino

Le programme de Zimmer est une collection de conjectures selon lesquelles les groupes suffisamment grands n'agissent que trivialement sur des variétés compactes de dimension relativement petite. En 2016, Aaron Brown, David Fisher, et Sebastian Hurtado trouvent la solution à l'une des conjectures les plus importantes, où les groupes considérés sont les réseaux dans les groupes de Lie simples de rang supérieur. Au-delà du résultat, le travail de Brown, Fisher, et Hurtado impressionne par le mélange de techniques provenant de la théorie des groupes de Lie, des systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques et sur les espaces homogènes, et des algèbres d'opérateurs.

1. Introduction

Une approche moderne aux systèmes dynamiques – l'étude de l'évolution d'un système dans le temps – consiste à les regarder en tant qu'actions de groupes sur une variété. Dans ce texte, une *action* d'un groupe topologique G sur une variété M, sera toujours un homomorphisme de G vers $\mathrm{Diff}^r(M)$ qui est continu par rapport à la topologie compacte ouverte. Lorsqu'on voudra considérer des homomorphismes *abstraits* $G \to \mathrm{Diff}^r(M)$, on regardera G comme groupe discret. Une action est dite *fidèle* lorsque l'homomorphisme est injectif, et *triviale* lorsque l'homomorphisme l'est. Ici on s'intéressera principalement aux actions fidèles. Par exemple, un difféomorphisme f de classe C^r d'une variété M correspond au sous-groupe cyclique $\langle f \rangle \leqslant \mathrm{Diff}^r(M)$ du groupe des difféomorphismes de classe C^r de M, et donc à un homomorphisme (ou représentation) $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{Diff}^r(M)$. De manière analogue, le flot $\{\phi_X^t\}$ d'un champ de vecteurs X sur M, correspond à un homomorphisme continu $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}^r(M)$ (en utilisant l'axiome du choix, on peut bien sûr trouver des homomorphismes $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}^r(M)$ qui ne sont pas continus, et qui ne correspondent pas à un flot !). Il est facile de se convaincre que certains groupes admettent souvent des actions fidèles : un homomorphisme du groupe libre $\rho : F_2 \to \mathrm{Diff}^r(M)$ correspond à choisir deux difféomorphismes de M « génériques », un homomorphisme du groupe abélien libre $\rho : \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Diff}^r(M)$ correspond à deux difféomorphismes qui commutent, etc. Mais pour des groupes possédant une structure algébrique plus compliquée, le problème d'existence n'est plus anodin. Mentionnons tout d'abord le problème *régularité de l'action* : même si l'on fixe la variété M, les groupes $\mathrm{Diff}^r(M)$ sont tous abstraitement différents lorsque la classe de régularité C^r varie. La différence algébrique peut se manifester même « localement » : tout récemment, Kim et Koberda ont exhibé, pour $r \geqslant 1$ fixé, un sous-groupe de type fini dans $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ de *régularité critique*, dans le sens qu'il n'est pas isomorphe à aucun sous-groupe de $\mathrm{Diff}^s(\mathbb{S}^1)$ pour tout choix de $s > r$ (le problème analogue en dimension plus grande est largement ouvert). Dans ce texte les problèmes de régularité ne seront abordés que pour le strict nécessaire.

Les premiers exemples de groupes agissant sur des variétés viennent naturellement de la *théorie de Lie*. D'une part, on peut étudier la question au niveau « infinitésimal » : le crochet de deux champs de vecteurs sur M définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathrm{Vect}(M)$, et on peut donc s'intéresser à étudier ses sous-algèbres de Lie. Rappelons aussi qu'un *groupe de Lie* (réel) est un groupe G qui admet une structure de variété différentiable, compatible avec les opérations de groupe. En particulier un groupe de Lie G, et tous ses sous-groupes, agissent sur la variété G par multiplication. Comme nous verrons dans ce texte, ce point de vue donne de nombreux exemples de nature géométrique, et le *programme de Zimmer* se demande d'une certaine manière à quel point les actions d'un sous-groupe discret dans un groupe de Lie sont d'origine géométrique.

D'autres efforts visaient à déterminer des obstructions à ce qu'une variété M admette une action d'un groupe *fini* G. Ces travaux rentrent dans ce qu'on appelle la *théorie de Smith*, et ils sont de nature et d'inspiration fortement topologique. Cependant, la théorie des groupes infinis, même de type fini, est bien plus sauvage. Lorsqu'un groupe possède assez d'éléments d'ordre fini, on peut se baser sur la théorie de Smith pour obtenir des conclusions sur ses actions sur une variété. En revanche, on se retrouve totalement démuni pour traiter les groupes sans torsion (c.-à-d. où tout élément d'ordre fini est trivial). Signalons par exemple le problème suivant qui est encore largement ouvert :

Question. *Existe-t-il un groupe de type fini sans torsion dont aucune action par homéomorphismes sur le plan* $\mathbb{R}^2$ *n'est fidèle ?*

En fait, on découvre des nombreux exemples d'actions naturelles dans tout cours introductif de topologie algébrique. Soit $\widetilde{M}$ une variété connexe et simplement connexe (c.-à-d. toute courbe fermée dans $\widetilde{M}$ peut être déformée continûment en un point), et supposons qu'un groupe G agit sur $\widetilde{M}$ de telle manière que le quotient $M = \widetilde{M}/G$ est aussi une variété : c'est le cas si G s'identifie à un sous-groupe discret du groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, où $\widetilde{g}$ est une métrique riemannienne sur $\widetilde{M}$ (attention : pour beaucoup de choix de $\widetilde{g}$ le groupe $\mathrm{Isom}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ peut être trivial !). Le groupe G est alors isomorphe au *groupe fondamental* $\pi_1(M)$, et la variété $\widetilde{M}$ s'identifie au *revêtement universel* de M.

Réciproquement, le groupe fondamental $\pi_1(M)$ d'une variété M (qui peut être défini sans introduire le revêtement universel) agit sur le revêtement universel $\widetilde{M}$, et le quotient $\widetilde{M}/G$ s'identifie à M. Cette action est dite de *monodromie*. De plus, on peut choisir une métrique riemannienne $\widetilde{g}$ sur $\widetilde{M}$ telle que l'action de monodromie soit isométrique, et cela donne un plongement discret de $\pi_1(M)$ dans le groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$.

Exemple 1. La droite réelle $\mathbb{R}$ est une variété connexe et simplement connexe. Le groupe cyclique $\mathbb{Z}$ des translations entières agit sur $\mathbb{R}$ et le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un tore de dimension un (c'est une manière savante d'appeler le cercle $\mathbb{S}^1$!). De manière plus générale, le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^d$ des translations entières de l'espace $\mathbb{R}^d$ donne comme quotient le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ de dimension d (et donc le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{T}^d)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^d$).

Exemple 2. On considère l'*espace hyperbolique* $\mathbb{H}^n$, que l'on peut voir comme la boule ouverte B^n de rayon un dans $\mathbb{R}^n$, avec une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante -1. De manière plus visuelle, les segments géodésiques dans $\mathbb{H}^n$ sont des arcs de cercles ou des segments de droites orthogonaux à la sphère ∂B^n. Le groupe d'isométrie qui préservent l'orientation $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^n)$ s'identifie à la composante connexe de l'identité dans le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(1,n)$. En petite dimension on a également les isomorphismes $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Une *variété hyperbolique* de dimension n est le quotient de $\mathbb{H}^n$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^n)$, avec la métrique induite par le quotient. Ainsi, le groupe fondamental $\pi_1(N)$ d'une variété hyperbolique, agit sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Le cas $n = 2$ est très visuel, car les sous-groupes discrets de $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$ correspondent aux groupes de réflexions d'un pavage régulier du plan hyperbolique, et la surface hyperbolique correspondante est obtenue par recollement de côtés d'une tuile du pavage.

Exemple 3. Comme indiqué dans le texte de Cantat [9], si l'on n'impose que la dimension de la variété, on a que tout groupe de type fini Γ agit sur une surface de Riemann non-compacte, et même par biholomorphismes ! Rappelons qu'un groupe est de *type fini* s'il existe une partie finie $S \subset \Gamma$ telle que $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$ (en d'autres termes, on peut exprimer tout élément de Γ comme produit fini d'éléments dans S). De manière équivalente, un groupe est de type fini s'il est isomorphe au quotient d'un groupe libre de rang fini $\Gamma \cong F_r/H$, où $H \triangleleft F_r$ est un sous-groupe distingué. Le groupe libre F_r est isomorphe au groupe fondamental de la surface de Riemann obtenue en retirant $r+1$ disques disjoints de la sphère $\mathbb{S}^2$, et le quotient F_r/H agit par monodromie sur le revêtement (galoisien) Σ associé à H.

Pour délimiter le champ de recherche, on se contente d'étudier les actions de groupes classiques qui possèdent déjà des actions de référence, d'origine géométrique. On préfère aussi se restreindre aux actions sur des variétés compactes.

Exemple 4. Soit N une variété hyperbolique tridimensionnelle de volume fini. Son revêtement universel s'identifie à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$, et son groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(N)$ agit sur $\mathbb{H}^3$ par isométries. On a donc une action de Γ sur la variété

$\mathbb{H}^3$, qui n'est pas compacte (elle s'identifie à une boule ouverte). Cependant, cette action s'étend à une action sur le *bord à l'infini* de $\mathbb{H}^3$, qui est homéomorphe à une sphère. En fait, l'action isométrique de Γ sur $\mathbb{H}^3$ correspond à un plongement de Γ dans le groupe d'isométries préservant l'orientation $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$, qui est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. L'action de Γ sur le bord de $\mathbb{H}^3$ est exactement l'action par homographies sur la sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1$ induite par le plongement. Il s'avère que de tels groupes fondamentaux admettent aussi des actions sur des variétés de dimension 1, qui ne viennent pas toujours d'une construction géométrique. Par exemple, pour des raisons arithmétiques, on peut trouver des 3-variétés hyperboliques N telles que $\pi_1(N)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, ce qui donne lieu a une action par homographies sur le cercle $\mathbb{R}P^1$ (voir Calegari [8]).

On s'intéressera par la suite à des généralisations de cet exemple. Essayons de comprendre le contexte d'un point de vue plus large. Le fait que N est une 3-variété de volume fini signifie exactement que $\Gamma = \pi_1(N)$ est un *réseau* dans le *groupe de Lie* $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. L'exemple géométrique est en fait de nature algébrique : la sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1$ s'identifie au quotient de G par le stabilisateur H dans G du point à l'infini, et l'action de Γ sur $\mathbb{C}P^1$ correspond à l'action à gauche sur l'*espace homogène* (c.-à-d. le quotient) G/H.

Les réseaux dans les groupes de Lie sont des objets omniprésents en géométrie, théorie des nombres, et théorie des groupes. En « rang supérieur » (voir plus loin), ils possèdent des propriétés de rigidité remarquables, et cela a conduit Robert Zimmer dans les années 1980 à entreprendre l'étude de leurs actions sur les variétés. Dans son programme visionnaire, il a formulé de nombreuses conjectures (voir [29]), dont l'une des plus importantes vient d'être résolue : dans le travail [5], Aaron Brown, David Fisher, et Sebastian Hurtado, démontrent le résultat suivant (l'énoncé inclut l'amélioration de la régularité de C^2 à C^1 obtenue par Brown, Damnjanovic, et Zhang [3]).

Théorème 1 (Brown, Fisher, et Hurtado). *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ et $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1(M)$ une représentation dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 d'une variété compacte M de dimension $d < n-1$. Alors l'image $\rho(\Gamma)$ est finie.*

En d'autres termes, le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ des matrices à coefficients entiers et de déterminant 1 (ainsi que ses sous-groupes d'indice fini) ne peut agir par difféomorphismes sur une variété compacte de dimension suffisamment petite, que de manière presque triviale (image finie). Ce résultat est optimal dans la mesure où le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, et en fait le groupe de Lie $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ tout entier, admet une action naturelle sur une variété compacte de dimension $n-1$: l'action par homographies sur l'espace projectif $\mathbb{R}P^{n-1}$ (remarquons qu'il s'agit aussi d'un espace homogène).

Il s'agit de l'un des résultats les plus frappants dans ce *programme de Zimmer*. Plus généralement, des conjectures précises ont été formulées pour comprendre les actions des réseaux dans des groupes de Lie semi-simples de rang supérieur et centre fini, tels que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 3$. L'hypothèse sur le rang est fondamentale, puisque nous avons vu dans l'exemple 4 que les réseaux dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, qui est un groupe de Lie de rang 1, agissent sur des variétés de dimension un.

Des survols exemplaires ont déjà été rédigés pour décrire les progrès dans le programme de Zimmer, voir notamment [13]. Nombreux sont aussi ceux qui décrivent les travaux de Brown, Fisher, et Hurtado [9, 14, 30]. Pour les lecteurs qui voudraient connaître encore plus de détails, on recommande vivement les textes [2, 4].

2. Actions des groupes de Lie

Pour mieux comprendre les origines du programme de Zimmer, nous allons esquisser ce qui est connu (ou pas) pour les actions des groupes de Lie. Ce sera aussi l'occasion d'introduire de la terminologie.

Soit G un groupe de Lie. L'espace tangent à l'élément neutre a une structure d'algèbre de Lie, et elle définit l'algèbre de Lie de G, que l'on notera $\mathrm{Lie}(G)$. Un groupe de Lie est *simple* si son algèbre de Lie est simple : c'est-à-dire non-commutative et ne contenant pas d'idéal propre non nul. Un groupe de Lie est *semi-simple* si son algèbre de Lie est un produit fini de facteur simples.

La classification de ces groupes représente une épopée dans l'histoire des mathématiques, entre le XIXe et le XXe siècles, à partir des travaux fondamentaux de Wilhelm Killing, et par des contributions successives de plusieurs auteurs, notamment Élie Cartan, Hermann Weyl, Bartel Leendert van der Waerden, Emil Artin, Ernst Witt, et pour conclure Eugene Dynkin. Le début de cette épopée est raconté par Hawkins dans la monographie [17].

À peu d'exceptions près, les groupes de Lie simples correspondent aux groupes classiques de matrices, tels que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(p,q)$, et $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Une notion importante pour la suite est le *rang (réel)* de G, noté $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G)$, à savoir la dimension de la sous-algèbre maximale $\mathfrak{a}$ de $\mathrm{Lie}(G)$, pour laquelle tout opérateur adjoint $\mathrm{ad}(a) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$, pour $a \in \mathfrak{a}$, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par exemple, le rang de $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est $n-1$, réalisé par la sous-algèbre $\mathfrak{a}$ des matrices diagonales (dans ce cas $\mathrm{Lie}(G)$ est l'algèbre des matrices de taille $n \times n$ et de trace nulle).

Le point de départ est peut-être le *cinquième problème de Hilbert*, résolu par les travaux de Gleason, Montgomery–Zippin, et Yamabe. De manière très informelle, ce problème affirme que la structure topologique des groupes de Lie est intimement liée à la géométrie. La conjecture suivante est souvent associée au cinquième problème de Hilbert :

Conjecture (Hilbert–Smith). *Tout groupe topologique localement compact qui admet une action fidèle sur une variété connexe de dimension n, est un groupe de Lie.*

La conjecture de Hilbert–Smith a été confirmée par Montgomery–Zippin en dimension 2 et bien plus récemment par Pardon en dimension 3. En fait, elle est équivalente à montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ premier, le groupe des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$ n'admet aucune action fidèle sur une variété connexe. Il s'agit d'un problème profondément topologique, car la conjecture a été prouvée dans le cas d'actions avec une faible régularité (par exemple, par difféomorphismes C^1, ou même homéomorphismes avec une bonne régularité höldérienne).

Plus spécifiquement, on peut se demander, étant donné un groupe de Lie G, quel est le plus petit entier $n(G)$ tel que G admette une action fidèle (par homéomorphismes) sur une variété compacte de dimension $n(G)$?

Donnons une intuition de comment obtenir une première estimation pour la dimension critique $n(G)$. Cet argument sera utilisé aussi plus loin dans ce texte. On supposera par simplicité que l'action est par difféomorphismes de classe C^1, et on notera $\rho : G \to \mathrm{Diff}^1(M)$ une action telle que l'image $\rho(G)$ est infinie. On peut toujours choisir, en faisant une « moyenne », une métrique riemannienne g qui soit invariante par un sous-groupe compact maximal $K \leqslant G$. D'après un résultat classique de Myers et Steenrod, le groupe $\mathrm{Isom}(M,g)$ est un groupe de Lie compact de dimension $\leqslant \frac{d(d+1)}{2}$, où $d = \dim M$. On a donc un homomorphisme entre les deux groupes de Lie compacts $K \to \mathrm{Isom}(M,g)$, ce qui force $\dim K \leqslant \frac{d(d+1)}{2}$.

Exemple 5. Soit $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, et $K = \mathrm{SO}(n) \leqslant G$. On a $\dim K = \frac{n(n-1)}{2}$, et par le raisonnement précédent toute action de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ sur une variété de dimension $d < n-1$ est triviale. Puisque G agit sur $\mathbb{R}P^{n-1}$, on en déduit $n(G) = n-1$.

Pour tout groupe de Lie semi-simple non-compact et de centre fini, la dimension critique exacte (dans le cas d'actions par difféomorphismes) a été déterminée par Stuck [24] : la dimension $n(G)$ est donnée précisément par la plus petite dimension d'un quotient G/P, où $P \leqslant G$ est un sous-groupe parabolique maximal. Ce qui est plus, il montre qu'en dimension $n(G)$ les seules actions de G, à revêtement fini près, sont données par l'action de G sur un espace homogène G/P, comme plus haut. Pour donner un exemple concret, les sous-groupes paraboliques de $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ sont les sous-groupes de G qui préservent un drapeau dans $\mathbb{R}^n$, et donc à conjugaison près, ils sont les sous-groupes des matrices dont la forme triangulaire par blocs est fixée :

$$P_{k_1,\dots,k_r} = \begin{pmatrix} (*)_{k_1\times k_1} & * & * & * \\ 0 & (*)_{k_2\times k_2} & * & * \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (*)_{k_r\times k_r} \end{pmatrix}.$$

Les paraboliques maximaux, à conjugaison près, sont donc donnés par les matrices triangulaires à deux blocs $P_{k,n-k}$, et les espaces homogènes associés correspondent aux grassmanniennes $\mathrm{Gr}(k,n) \cong G/P_{k,n-k}$ (espace des k-plans dans $\mathbb{R}^n$), de dimension $k(n-k)$. On retrouve la plus petite dimension $n(G) = n-1$ pour $k \in \{1, n-1\}$, ce qui correspond à $\mathbb{R}P^{n-1} = \mathrm{Gr}(1,n) \cong \mathrm{Gr}(n-1,n)$. On remarque que dans ce cas on a l'égalité $n(G) = \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G)$. Cependant l'écart entre ces deux nombres peut être arbitrairement grand : pour $G = \mathrm{O}(p,q)$, le groupe des transformations linéaires qui préservent une forme quadratique de signature (p,q) sur $\mathbb{R}^{p+q}$, on a $n(G) = p+q-2$, alors que $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) = \min\{p,q\}$.

On mentionnera brièvement ici le problème analogue pour les actions des groupes de difféomorphismes. La question, posée par Ghys, est de savoir si le groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ de tous les difféomorphismes de classe C^r d'une variété M, peut agir sur une variété de dimension strictement inférieure à celle de M. La réponse attendue est négative, et cela a été confirmé dans la plupart des cas, par des nombreux travaux récents (notamment par Chen et Mann, Hurtado, Matsumoto, Militon, etc.). L'un des aspects les plus remarquables des résultats obtenus, est qu'ils sont valables pour les actions de $\mathrm{Diff}^r(M)$ en tant que groupe *discret*. À notre connaissance ce problème n'a pas été considéré pour les actions des groupes de Lie simples : le fait que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, en tant que groupe discret, n'agisse pas sur une variété compacte de dimension $\leqslant n-2$ est connu seulement comme conséquence du théorème 1 ! On invite le lecteur intéressé à consulter l'article de survol de Mann [20].

3. Réseaux

Dans cette section un peu plus technique nous introduirons plus formellement la notion de réseau dans un groupe de Lie semi-simple. Cela généralise l'exemple basique de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, auquel le lecteur non-spécialiste pourra se limiter.

Les groupes de Lie, comme tout groupe localement compact, admettent une *mesure de Haar*, c'est-à-dire une mesure de Borel quasi-régulière [1], non triviale et invariante par multiplication à droite. Soit donc G un groupe de Lie et ν une mesure de Haar. Si $H \leqslant G$ est un sous-groupe fermé, la mesure ν induit une mesure ν_H sur le quotient G/H. On dit qu'un sous-groupe $\Gamma \leqslant G$ est un *réseau* de G si Γ est discret (en particulier fermé) et la mesure ν_Γ sur le quotient G/Γ est finie. Cela est notamment le cas lorsque le quotient G/Γ est compact, auquel cas on dira que Γ est un réseau *cocompact* (ou *uniforme*). Remarquons que, même si $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ représente l'exemple classique de réseau, il est en revanche non-cocompact (le quotient $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ est identifié à l'espace des réseaux dans $\mathbb{R}^n$ de covolume 1).

Il n'est pas évident à partir de la définition, de savoir si un groupe de Lie admet des réseaux, et à quel point ils constituent une classe riche de sous-groupes. Un théorème important par Borel et Harish-Chandra généralise l'exemple de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ à tout groupe de Lie semi-simple. Supposons par simplicité que le groupe de Lie G soit un groupe de matrices. On part d'une identification de G comme sous-groupe des points réels $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ d'un groupe de Lie algébrique $\mathbf{H}$ défini sur $\mathbb{Q}$ (de manière plus informelle, on prend des équations algébriques à coefficients rationnels, telles que les solutions dans $\mathbb{R}$ définissent le groupe G), et on considère le sous-groupe $\Gamma = G \cap \mathbf{H}(\mathbb{Z})$ des points entiers (c.-à-d. les solutions dans $\mathbb{Z}$ des équations définissant $\mathbf{H}$). Le sous-groupe Γ construit ainsi est un réseau dans G ! En outre, un groupe de Lie G admet plusieurs réalisations en tant que points réel d'un groupe algébrique, et l'on obtient ainsi des réseaux différents dans G (cocompacts et non-cocompacts). Ces réseaux sont dits *arithmétiques*.

Exemple 6. Il est facile de construire ainsi des réseaux non-cocompacts. Par exemple si $G \leqslant \mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie simple de matrices défini sur $\mathbb{Q}$, tel qu'un groupe orthogonal $\mathrm{O}(p,q) \leqslant \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{R})$ ou le groupe des matrices symplectiques $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \leqslant \mathrm{SL}(2n,\mathbb{R})$, on aura que $G \cap \mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$ est un réseau.

Comme exemple légèrement plus élaboré, on peut considérer le groupe de Lie simple complexe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Alors le groupe de matrices $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}[i])$ à coefficients dans les entiers de Gauss définit un réseau (en effet $\mathbb{Z}[i]$ est l'ensemble des points entiers de $\mathbb{C}$).

Exemple 7. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(p,q)$ correspond au groupe de matrices préservant la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature (p,q) :

$$Q_0(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - y_1^2 - \ldots - y_q^2.$$

Il s'agit bien évidemment d'un groupe défini sur $\mathbb{Q}$, car la relation $T^t I_{p,q} T = I_{p,q}$ qui détermine les éléments $T \in \mathrm{O}(p,q)$ correspond à un système d'équations à coefficients entiers en les coefficients de T ($I_{p,q}$ étant ici la matrice diagonale avec p coefficients $+1$ et q coefficients -1).

Si l'on remplace la forme quadratique Q_0 par une autre forme quadratique $Q(x) = \langle x, Ax\rangle$ de même signature, le groupe correspondant $\mathrm{O}(Q,\mathbb{R})$ sera isomorphe à $\mathrm{O}(p,q)$, mais les équations définissant les éléments de $\mathrm{O}(Q,\mathbb{R})$ sont données maintenant par $T^tAT = A$. Le groupe $\mathrm{O}(Q,\mathbb{R})$ sera défini sur $\mathbb{Q}$ si le corps engendré par les coefficients de A est un *corps de nombres*, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$. Lorsque cette condition est vérifiée, on notera $\mathrm{O}(Q,\mathbb{Z})$ le sous-groupe des points entiers de $\mathrm{O}(Q,\mathbb{R})$, qui est un réseau d'après le théorème de Borel et Harish-Chandra. On peut déterminer par des considérations arithmétiques si le réseau $\mathrm{O}(Q,\mathbb{Z})$ est cocompact. Par exemple, en choisissant

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - \sqrt{2}\left(y_1^2 + \ldots + y_q^2\right),$$

1. La mesure de tout ouvert A est approchée par la mesure des compacts « plus petits » $K \subset A$, et la mesure de tout borélien E est approchée par la mesure des ouverts « plus gros » $A \supset E$.

on obtient que

$$\mathrm{O}(Q,\mathbb{Z}) = \mathrm{O}(Q,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}\left(p+q,\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\right)$$

est un réseau cocompact dans $\mathrm{O}(Q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{O}(p,q)$.

Exemple 8. Une construction légèrement différente passe par les *algèbres de quaternions*. On illustrera simplement une construction pour $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, le plus petit groupe de Lie simple.

Soient a et b des entiers positifs, et considérons l'algèbre de quaternions

$$\mathbb{H}^{a,b} = \{p+qi+rj+sk \mid p,q,r,s \in \mathbb{R}\},$$

déterminée par la règle de multiplication

$$i^2 = a,\ j^2 = b,\ ij = -ji = k,$$

et de conjugaison

$$\overline{p+qi+rj+sk} = p-qi-rj-sk.$$

Cela définit le groupe des quaternions de norme unitaire

$$\mathrm{SL}(1,\mathbb{H}^{a,b}) = \left\{x \in \mathbb{H}^{a,b} \mid x\overline{x} = 1\right\},$$

qui est en fait isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Le sous-groupe des points entiers (c.-à-d. les éléments définis par le choix de $p,q,r,s \in \mathbb{Z}$) est un réseau arithmétique. Par exemple, lorsque l'on choisit $a = 3$ et $b = 5$ le réseau obtenu est cocompact.

Mentionnons ici le contenu du théorème de densité de Borel, qui suggère que les réseaux constituent une bonne « discrétisation algébrique » d'un groupe de Lie. Si G est un groupe de Lie semi-simple connexe sans facteurs compacts, et $\Gamma \leqslant G$ est un réseau, alors l'adhérence de Zariski de Γ coïncide avec G. En d'autres termes, tout polynôme à coefficients réels qui s'annule sur Γ, s'annule également sur G.

Un résultat impressionnant de Grigory Margulis affirme que si G est un groupe de Lie semi-simple, avec $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) \geqslant 2$, alors tout réseau (irréductible) de G est arithmétique. Cela s'applique notamment au groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 3$. En revanche, cela n'est pas valable en rang 1, où la compréhension des réseaux non arithmétiques est un terrain de recherche très actif.

Voici un deuxième résultat important de Margulis, connu comme *théorème du sous-groupe distingué*.

Théorème 2 (Margulis). *Soit G un groupe de Lie semi-simple de rang $\geqslant 2$ et centre fini, et soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau irréductible. Si $N \triangleleft G$ est un sous-groupe distingué, alors soit Γ/N ou N est fini (et dans le deuxième cas N est dans le centre de G).*

Une conséquence importante est que toute action d'un tel réseau dont l'image est infinie, est (presque) fidèle.

On renvoie au livre excellent de Witte Morris [25] pour une introduction aux réseaux (arithmétiques) et aux travaux de Margulis, mais on pourra consulter aussi les notes de cours de master de 2008 de Benoist [1].

4. Superrigidité de Margulis

L'un des éléments essentiels de la preuve du théorème d'arithméticité de Margulis est le célèbre théorème de *superrigidité*, que l'on va essayer de formuler ici en termes simplifiés. D'une certaine manière, le théorème soutient l'idée montrée par le théorème de densité de Borel, qu'un réseau est une bonne discrétisation d'un groupe de Lie.

Rappelons qu'un réseau Γ dans un groupe de Lie semi-simple G est *irréductible* si aucune projection de Γ dans un facteur simple de G ne définit un réseau. Par exemple, si $\Gamma_1 \leqslant G_1$ et $\Gamma_2 \leqslant G_2$ sont deux réseaux, le produit $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ $G_1 \times G_2$ est un réseau dans $G_1 \times G_2$, mais pas irréductible.

Théorème 3 (Margulis). *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe sans facteurs compacts et de centre fini, avec $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) \geqslant 2$, et soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau irréductible. Soit $\pi : \Gamma \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ une représentation linéaire du réseau Γ. Alors π s'étend en une représentation linéaire continue $\hat{\pi} : G \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ (à erreur bornée près, voir remarque 2).*

On retiendra ce qui suit : toute représentation linéaire d'un réseau dans un groupe de Lie simple de rang $\geqslant 2$, s'étend au groupe de Lie (à correction bornée près). Puisque les représentations linéaires d'un groupe de Lie simple sont bien connues, cela nous donne une classification des représentations linéaires des réseaux !

Remarque 1. Nous avons déjà vu dans l'exemple 4, qu'il existe des réseaux $\Gamma \leqslant \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, qui se plongent dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, donc l'hypothèse de rang supérieur $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) \geqslant 2$ est essentielle (même si Corlette, et Gromov et Schoen, démontrent que certains groupes de rang 1 sont aussi superrigides).

Remarque 2. Plus précisément, on obtient comme conclusion dans le théorème 3 qu'il existe une représentation $\hat{\pi} : G \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ et un sous-groupe compact $K \leqslant \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ qui commute avec l'image de $\hat{\pi}$, et tel que $\hat{\pi}(\gamma)^{-1}\pi(\gamma) \in K$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Remarquons tout de même qu'il existe des représentations non-triviales $\pi : \Gamma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ à image dans un sous-groupe compact $K \leqslant \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, auquel cas on peut prendre simplement comme $\hat{\pi}$ la représentation triviale. On peut en fait trouver des exemples par des considérations arithmétiques élémentaires. Pour cela, comme dans l'exemple 7 considérons la forme quadratique

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{2}\left(x_4^2 + x_5^2\right)$$

sur $\mathbb{R}^5$, de signature $(3, 2)$. Le groupe de Lie $\mathrm{O}(Q, \mathbb{R})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{O}(3, 2)$, donc de rang 2. L'automorphisme de Galois τ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ qui envoie $\sqrt{2}$ sur $-\sqrt{2}$, transforme la forme quadratique Q en une forme Q^τ définie positive. Donc le groupe $\mathrm{O}(Q^\tau, \mathbb{R})$ est compact, isomorphe à $\mathrm{O}(5)$. On considère alors le sous-groupe

$$\Gamma = \mathrm{O}(Q, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}\left(5, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]\right),$$

qui est un réseau cocompact dans $\mathrm{O}(Q, \mathbb{R})$. Cependant, la représentation de Γ dans $\mathrm{O}(Q^\tau, \mathbb{R})$ définie par $g \mapsto g^\tau$ ne s'étend pas à $\mathrm{O}(Q, \mathbb{R})$.

Décrivons une application dans le contexte du programme de Zimmer. Soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau dans un groupe de Lie simple de rang $\geqslant 2$, et considérons une action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1(M)$ de Γ sur une variété riemannienne compacte (M, g), *par isométries*. Cela signifie que l'image $\rho(\Gamma)$ est incluse dans le groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(M, g)$. Supposons que l'action de Γ ne soit pas triviale, c'est-à-dire que l'image $\rho(\Gamma)$ ne soit pas finie. En utilisant le théorème de superrigidité de Margulis, et le théorème de Myers–Steenrod comme plus haut, on obtient que le groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(M, g)$ ne peut pas être trop petit [2], et un petit calcul donne $\dim M \geqslant \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) - 1$.

5. Superrigidité de Zimmer

Le programme de Zimmer a été conçu en réfléchissant à quel serait l'analogue non linéaire du théorème de superrigidité de Margulis. Pour connaître mieux sa genèse, on conseille vivement le récit autobiographique de Zimmer dans [30]. En 1978, il est en voyage en Scandinavie pour participer au congrès international des mathématiciens à Helsinki, où Margulis sera l'un des lauréats de la médaille Fields (même si l'état soviétique l'empêchera de s'y rendre). Dans son récit, Zimmer indique aussi comme décisive une rencontre avec Alain Connes quelques jours avant, dans un événement satellite, qui lui suggère que les travaux de Margulis devraient pouvoir être réinterprétés dans le programme de recherche de Zimmer.

Pour mieux comprendre cela, réfléchissons différemment aux actions de groupes sur les variétés : si un groupe agit sur une variété M, il agit alors sur tout espace naturellement associé à M, tel que l'espace tangent TM. Pour simplifier, plaçons nous dans le cas où le fibré tangent est trivial, c'est-à-dire qu'il admet une structure produit $TM = M \times \mathbb{R}^d$, où $d = \dim M$. C'est le cas par exemple lorsque $M = \mathbb{T}^d$ est un tore. La structure de fibré vectoriel de TM permet d'associer à toute action $\rho : G \to \mathrm{Diff}^r(M)$ d'un groupe G quelconque, le *cocycle linéaire* $\alpha : G \times M \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ défini par la dérivée, $\alpha(g, x) = D_x\rho(g)$. En effet, la relation de cocycle

$$\alpha(g_2 g_1, x) = \alpha\left(g_2, \rho(g_1)(x)\right) \alpha(g_1, x)$$

correspond à la règle de dérivation par chaîne. Remarquons ici que des informations complémentaires sur l'action donnent des restrictions sur les valeurs possibles du cocycle α, et réciproquement. Par exemple, si l'action préserve une forme de volume, on aura que l'image de α est dans $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$; si l'action préserve une métrique riemannienne, alors l'image sera dans le groupe compact $\mathrm{O}(d)$ « à conjugaison près ». En fait, quand on parle de cocycles, la bonne notion de conjugaison est exprimée par la relation d'être *cohomologues* : deux cocycles $\alpha, \beta : G \times M \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ sont cohomologues s'il existe une fonction continue $h : M \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ telle que

$$h(\rho(g)(x))\, \alpha(g, x) = \beta(g, x)\, h(x).$$

Réciproquement, étant donné un cocycle $\alpha : G \times M \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur une action $\rho : G \to \mathrm{Diff}^r(M)$, on obtient une action ρ^α sur $M \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$\rho^\alpha(x, v) = (\rho(g)(x), \alpha(g, x)v).$$

Deux cocycles cohomologues donnent lieu à des actions conjuguées sur $M \times \mathbb{R}^n$.

2. Plus précisément, par le théorème 3, si H est un groupe de Lie compact simple et si $G^{\mathbb{C}}$ (le complexifié de G, vu comme groupe de matrices) ne s'injecte pas dans $H^{\mathbb{C}}$, alors tout homomorphisme $\rho : \Gamma \to H$ est d'image finie.

Remarque 3. Pour que cette approche soit valable dans tous les cas, et pas seulement lorsque $TM = M \times \mathbb{R}^d$, il faut payer un prix en termes de régularité : on fixe une forme de volume μ sur M, et une partie mesurable $X \subset M$ de mesure totale, sur lequel le fibré est trivial. On parle alors de *trivialisation mesurable* de TM.

Le théorème de superrigidité de Margulis peut être formulé en termes de cocycles. Comme dans l'énoncé du théorème 3, soit $\pi : \Gamma \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ une représentation linéaire, et considérons le fibré vectoriel E de rang d sur la variété $M = G/\Gamma$,

$$\mathbb{R}^d \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$$

obtenu par *suspension*. Cela correspond à prendre comme espace total E, le quotient de $G \times \mathbb{R}^d$ par l'action diagonale de Γ :

$$E = G \times \mathbb{R}^d /_{(x,v) \sim (x\gamma, \pi(\gamma^{-1})v)} \quad (\gamma \in \Gamma).$$

Le groupe de Lie G agit sur la base $M = G/\Gamma$ par multiplication à gauche, et cela s'étend à une action sur le fibré E [3]. La conclusion dans le théorème 3 revient à dire que ce fibré est équivalent [4] (à erreur bornée près, voir remarque 2) au fibré trivial $(G/\Gamma) \times \mathbb{R}^d$.

Après cette discussion, on peut énoncer une version simplifiée du théorème de superrigidité de Zimmer.

Théorème 4 (Zimmer). *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe sans facteurs compacts ou de rang 1, et soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau irréductible. Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^r(M)$ une représentation, μ une mesure de probabilité Γ-ergodique sur M [5], et $\alpha : \Gamma \times M \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un cocycle intégrable. Il existe alors une représentation $\pi : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, un sous-groupe compact $K \leqslant \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qui commute avec $\pi(G)$ et un cocycle mesurable $k : \Gamma \times (M, \mu) \to K$ tels que α est mesurablement cohomologue à $k\pi|_\Gamma$.*

Remarque 4. On ne formalisera pas l'hypothèse d'intégrabilité dans l'énoncé. Par continuité et compacité, elle est toujours vérifiée par les cocycles qui nous intéressent ici, naturellement définis par une action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^r(M)$, tels que le cocycle dérivée.

Dans le cas où le cocycle α est le cocycle dérivée comme dans notre exemple de départ (et donc $n = d = \dim M$), et si le groupe de Lie G est suffisamment grand pour que tout morphisme $\pi : G \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ soit trivial, le théorème 4 implique que le cocycle α est mesurablement cohomologue à un cocycle à valeurs dans le groupe compact $\mathrm{O}(d)$. Lorsque Γ préserve une forme de volume sur M, cela signifie que l'action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^r(M)$ doit en fait préserver une « métrique mesurable ». L'enjeu est alors de rendre cette métrique (plus précisément, le cocycle k dans l'énoncé du théorème 4) plus régulière, car on aurait alors une vraie action isométrique de Γ sur M, à laquelle on appliquerait le raisonnement à la fin de la section précédente pour obtenir que l'image $\rho(\Gamma)$ est finie.

6. La conjecture de Zimmer

Inspiré par son théorème de superrigidité (théorème 4), Zimmer formule alors sa célèbre conjecture, que nous présentons ici.

Conjecture (Zimmer). *Soit G un groupe de Lie simple connexe sans facteurs compacts ou de rang 1, et soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau irréductible. Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^1(M)$ une action sur une variété compacte de dimension $d < n(G)$. Alors l'image $\rho(\Gamma)$ est finie.*

Des commentaires sont nécessaires. La conjecture originale était pour des actions lisses (C^∞), préservant une forme de volume (voir la discussion à la fin de la dernière section), auquel cas la dimension critique à considérer est en fait plus grande : par exemple, c'est n dans le cas de réseaux dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ agit sur le tore $\mathbb{T}^n$ en préservant la mesure de Lebesgue). La version reportée ici provient d'un article de Farb et Shalen [12], mais elle n'a pas été reniée par Zimmer. On peut aussi se demander si la version topologique de la conjecture, c'est-à-dire pour des actions par homéomorphismes, peut être vraie (mais cela garde le statut de « question », plutôt que de « conjecture »).

Remarque 5. Dans l'énoncé de la conjecture de Zimmer, $n(G)$ correspond à la plus petite dimension d'un espace homogène G/P, voir section 2. On peut être plus précis et minimiser aussi sur la plus petite dimension d'un espace homogène K/P, où K est un groupe de Lie compact admettant un homomorphisme $\Gamma \to K$ non trivial, ainsi que sur la plus petite dimension d'une représentation linéaire.

Plus généralement, le *programme de Zimmer* s'intéresse à l'interaction entre actions de réseaux

3. Le cocycle correspondant à cette action est caché dans le fait qu'il faut choisir une trivialisation mesurable du fibré E, voir remarque 3.
4. Plus précisément, il existe un isomorphisme G-équivariant entre les fibrés.
5. Rappelons que le terme ergodique signifie que toute partie mesurable Γ-invariante est de mesure nulle ou totale.

et structures géométriques sur les variétés (dont nous ne discuterons pas ici). Dans ce cadre, les travaux suivants de Gromov sur les structures rigides [16] ont aidé à la rédaction de ce programme.

Passons rapidement en revue ce qui était connu pour la conjecture de Zimmer avant les travaux de Brown, Fisher, et Hurtado. Malheureusement on sera obligés de faire des omissions, mais le lecteur pourra consulter les survols de Fisher dans [30] et le séminaire Bourbaki de Cantat [9] pour avoir un cadre plus complet.

Pour les actions en dimension un, la conjecture a été résolue indépendamment par Burger et Monod (par des techniques de cohomologie bornée) et Ghys (par des techniques de nature plus ergodique). Cependant un résultat antérieur de Witte Morris, dont la preuve est très jolie, montre que tout réseau non-cocompact dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, pour $n \geqslant 3$, n'agit que trivialement (image finie) sur la *droite réelle* $\mathbb{R}$ par *homéomorphismes*. Le point final vient d'être mis par Deroin et Hurtado [11] (justement en reprenant les idées de Brown, Fisher, et Hurtado, et en s'appuyant sur les propriétés des marches aléatoires dans $\mathrm{Homéo}_+(\mathbb{R})$ établies par Deroin, Klepstyn, Navas, et Parwani) :

Théorème 5 (Deroin et Hurtado). *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, avec centre fini et $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) \geqslant 2$, et soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau irréductible. Alors tout homomorphisme $\rho : \Gamma \to \mathrm{Homéo}_+(\mathbb{R})$ est trivial.*

D'autres auteurs se sont intéressés à des actions par homéomorphismes sur des variétés spécifiques de dimension supérieure (typiquement des sphères ou des tores), et les méthodes sont souvent plus topologiques que dynamiques. À l'autre extrême, certains travaux discutent les cas d'actions par difféomorphismes analytiques réels (par exemple Ghys [15], et Farb et Shalen [12]), ou des variantes holomorphes et birationnelles de la conjecture de Zimmer par Cantat et ses collaborateurs. Soulignons que le cas birationnel étudié par Cantat et Xie [10] n'est pas couvert par les résultats de Brown, Fisher, et Hurtado.

Des résultats remarquables ont également été obtenus dans le cas d'actions sur les surfaces préservant une mesure de probabilité, indépendamment par Franks et Handel, et Polterovich, mais uniquement pour les réseaux non-cocompacts (en étudiant les propriétés de *distorsion* dans les groupes de difféomorphismes d'une surface). En fait, le travail plus récent de Brown, Rodriguez Hertz, et Wang [7] (qui a été précurseur pour les résultats de Brown, Fisher, et Hurtado, comme nous mentionnerons plus loin) permet d'obtenir toujours une mesure de probabilité invariante pour des actions de tels réseaux sur les surfaces. Un problème annexe est de comprendre les morphismes de réseaux dans les groupes de Lie de rang supérieur dans les *groupes de difféotopies* (en anglais, *mapping class groups*) des surfaces. Des travaux par Farb et Masur, et Farb et Kaimanovich (voir aussi un travail récent par Haettel) montrent qu'ils sont toujours d'image finie.

7. Les travaux de Brown, Fisher, et Hurtado

En 2016, Brown, Fisher, et Hurtado annoncent leur premier résultat sur la conjecture de Zimmer, qui sera objet de la prépublication [6]. Ils valident la conjecture de Zimmer pour les réseaux cocompacts, dans une certaine classe de groupes de Lie simples (dits *déployés*), et ils obtiennent des bornes non-optimales sur la dimension critique pour les autres groupes de Lie simples. Le cas des réseaux non-cocompacts s'avère plus compliqué sous différents aspects : le théorème 1 obtenu dans [5] règle la conjecture juste pour $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ et ses sous-groupes d'indice fini, mais la preuve est sensiblement plus complexe. Pour d'autres réseaux non-uniformes, Brown, Fisher, et Hurtado ont un travail en cours de rédaction. Ces derniers travaux sur les réseaux non-uniformes s'appuient fortement sur les contributions par de la Salle [23] et Witte Morris [26], qui ont été écrites « sur commande ».

D'autres auteurs ont aidé à progresser dans le programme de Zimmer, à la suite de Brown, Fisher, et Hurtado. Signalons par exemple le travail de Zhang [28] qui discute le cas de certains groupes de Lie simples complexes (qui sont non-déployés), les contributions de Pecastaing [21, 22] sur les aspects plus géométriques du programme de Zimmer, et Lee [19] sur la classification des actions en dimension critique. D'autres avancées ne tarderont certainement pas !

Dans la suite de cet article nous essayerons de décrire les éléments principaux de la preuve dans [6]. Comme on le verra, l'une de ses richesses est qu'elle met en interaction trois différents domaines : la théorie des groupes de Lie semi-simples, les systèmes dynamiques, et la théorie des algèbres d'opérateurs.

8. Croissance des dérivées

Dès maintenant, on supposera que G est un groupe de Lie simple connexe de rang supérieur, et $\Gamma \leqslant G$ un réseau cocompact. On considérera une action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ par difféomorphismes lisses (C^∞) de Γ sur une variété compacte M de dimension $d = \dim M$ suffisamment petite ($d < \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G)$). Le lecteur peut supposer $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sans trop perdre en généralité. Le but principal de la preuve est d'établir que sous ces hypothèses, l'action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ doit être isométrique et conclure par le théorème de superrigidité de Margulis (théorème 3) comme nous l'avons expliqué à la fin de la section 4. Cela ne paraît pas tellement différent de la stratégie originale de Zimmer, mais en fait la preuve ne passe pas par la « métrique mesurable » donnée par le théorème de superrigidité de Zimmer (théorème 4). À la place, elle repose sur une propriété de point fixe pour les actions sur des espaces de Banach du réseau Γ : la *propriété (T) renforcée* de Vincent Lafforgue, et établie pour tout réseau par de Laat et de la Salle [23].

Comme son nom l'indique, il s'agit d'une généralisation de la propriété (T) classique introduite par Kazhdan, qui est une propriété de point fixe pour les actions isométriques sur un espace de Hilbert. En fait, Kazhdan introduit cette notion pour montrer une propriété tout à fait fondamentale pour les réseaux dans les groupes de Lie semi-simples de rang supérieur : ils sont de *type fini*. Pour la suite on fixera un telle partie génératrice finie $S \subset \Gamma$.

Maintenant, essayons de comprendre les actions isométriques du point de vue des systèmes dynamiques. Elle a une propriété remarquable : la dérivée de tout élément est en tout point dans un groupe orthogonal, et donc la norme de la dérivée est toujours constante. En particulier, pour tout $\gamma \in \Gamma$ fixé, la norme de la dérivée $D_x\rho(\gamma)$ a une croissance sous-exponentielle par rapport à la longueur des mots $\ell_S(\gamma)$ (le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma \in S^n$), et cela uniformément en $x \in M$.

Cette propriété de *croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées* est fondamentale. Son importance dans le contexte de la conjecture de Zimmer avait été devinée par Hurtado suite à son travail sur le problème de Burnside pour les difféomorphismes de la sphère [18][6]. Il s'avère que la propriété (T) renforcée donne le bon cadre pour obtenir une métrique riemannienne invariante, sous l'hypothèse de croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées. En effet, la propriété (T) renforcée implique le résultat suivant :

Théorème 6. *Soit $\Gamma \leqslant G$ un réseau dans un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts ou de rang 1, et soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour toute représentation $\pi : \Gamma \to B(\mathscr{H})$ dans l'espace des opérateurs bornées de $\mathscr{H}$, avec un contrôle de croissance des normes d'opérateur*

$$\|\pi(\gamma)\| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon \ell_S(\gamma)},$$

il existe une suite de mesures de probabilité μ_n sur Γ, supportées sur la boule S^n, telle que pour tout $v \in \mathscr{H}$, la suite des vecteurs moyennés

$$v_n = \int_\Gamma \pi(\gamma) v \, d\mu_n(\gamma)$$

converge exponentiellement vite vers un vecteur Γ-invariant $v^* \in \mathscr{H}$.

L'énoncé est long et technique, mais il faut interpréter cela comme une « machine » qui produit des points fixes, de manière presque constructive. Pour pouvoir l'utiliser, on doit considérer toute métrique riemannienne sur M comme étant un vecteur dans un espace de Hilbert approprié. Rappelons pour cela qu'une métrique riemannienne est par définition une section C^∞ du fibré $S^2(T^*M)$ des formes bilinéaires symétriques, avec la propriété qu'elle est définie positive en tout point. On considère alors l'espace linéaire des sections de classe C^k de $S^2(T^*M)$, complété par rapport à une norme de type Sobolev $W^{k,2}$, et on choisit la régularité k suffisamment élevée pour que le théorème de plongement de Sobolev assure que toute section soit assez régulière. On notera $\mathscr{H} = W^{k,2}(M, S^2(T^*M))$ cet espace de Hilbert que l'on vient de choisir. L'action ρ induit une action $\pi^\rho : \Gamma \to B(\mathscr{H})$ sur $\mathscr{H}$ et la norme d'un opérateur $\pi^\rho(\gamma)$ est bornée par un polynôme en termes des dérivées premières $\sup_{x \in M} \|D_x\rho(\gamma)\|$. L'hypothèse de croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées implique alors que la représentation $\pi^\rho : \Gamma \to B(\mathscr{H})$ vérifie la condition dans le théorème 6. Si l'on part d'un vecteur $v \in \mathscr{H}$ donné par une métrique riemannienne sur M, on obtient alors un vecteur Γ-invariant $v^* \in \mathscr{H}$, qui est la limite des vecteurs moyennés v_n. Puisque le sous-espace des métriques riemanniennes dans $\mathscr{H}$ définit un convexe, chaque vecteur v_n est aussi une métrique riemannienne, et

6. Le *problème de Burnside* pour un groupe est une généralisation d'une question posée par Burnside en 1902. Il s'agit de savoir si un groupe donné (typiquement assez grand) a la propriété que tout sous-groupe de type fini où tout élément est de torsion, est nécessairement fini.

la convergence exponentielle dans le théorème 6 assure que la limite v^* correspondra aussi à une métrique riemannienne.

Remarque 6. Pour traiter le cas d'actions juste C^1, il faut travailler plutôt avec l'espace de Banach des sections L^p de $S^2(T^*M)$, avec p suffisamment grand (le théorème 6 est valable plus généralement pour des actions sur certains espaces de Banach), puis utiliser la solution de la conjecture de Hilbert–Smith pour les actions en régularité höldérienne. Voir Brown, Damjanovic, et Zhang [3].

Le cœur de la preuve de Brown, Fisher, et Hurtado consiste alors à montrer qu'il n'est pas possible d'avoir d'actions de Γ sur M sans croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées.

9. Systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques

En systèmes dynamiques, le taux de croissance asymptotique des dérivées $D_x f^n$ des itérées d'un difféomorphisme $f : M \to M$ est une quantité numérique qui est employée pour quantifier les propriétés « chaotiques » du système. En fait, ce taux varie en général par rapport au point $x \in M$ et il est quasiment impossible à calculer. Pour contourner ce problème, on adopte un point de vue probabiliste : si μ est une mesure de probabilité sur M invariante par f, on ne regardera le taux de croissance asymptotique des dérivées que μ-presque partout. Un théorème classique d'Oseledets (il s'agit d'un théorème ergodique multiplicatif qui est valable plus généralement pour les cocycles intégrables, tels que décrits dans la section 5), assure le bon comportement de cette croissance, voir plus.

Théorème 7 (Oseledets). *Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ un difféomorphisme d'une variété compacte M, et soit μ une mesure de probabilité invariante par f et ergodique. Il existe alors*

- *une partie mesurable $X \subset M$ de mesure totale,*
- *des nombres $\lambda_1 > \cdots > \lambda_p$,*
- *une décomposition mesurable et Df-invariante du fibré tangent*

$$T_x M = E^1(x) \oplus \cdots \oplus E^p(x), \quad x \in X,$$

tels que pour tout $x \in X$ et $v \in E^i(x) \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v)\| = \lambda_i.$$

Les nombres λ_i sont les *exposants de Lyapunov* de f (par rapport à la mesure μ). Par ergodicité de la mesure, chaque dimension $\dim E^i(x)$ est constante par rapport à $x \in X$, et elle correspond à la *multiplicité* de l'exposant de Lyapunov λ_i. L'énoncé du théorème est assez clair : lorsque n est très grand, la dérivée $D_x f^n$ est très proche de la puissance n-ième d'une matrice dont le spectre est donné par les exposants de Lyapunov, et sous-espaces propres $E_i(x)$.

Lorsqu'on regarde l'action du groupe $\mathbb{Z}$ définie par l'itération d'un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, la propriété de croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées correspond à ce que les exposants de Lyapunov de f soient tous nuls, et ce par rapport à toute mesure de probabilité f-invariante. En revanche, lorsqu'on considère l'action d'un groupe G quelconque, l'absence en général de mesures de probabilité G-invariantes nous empêche de prendre cette approche ergodique. Toutefois, lorsque le groupe est *abélien* (plus généralement, *moyennable*), par exemple $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, des mesures de probabilité invariantes existent toujours. On dispose dans ce cas d'une version généralisée du théorème d'Oseledets, où les exposants de Lyapunov sont remplacés par des fonctionnelles linéaires $\lambda_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Revenons un instant aux groupes de Lie semi-simples. Un tel groupe G admet une *décomposition* $G = KAK$, où $A \leqslant G$ est un sous-groupe abélien isomorphe à $\mathbb{R}^d$, où $d = \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G)$, et K est un sous-groupe compact de G. Dans le cas $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, cela correspond à la décomposition en valeurs singulières d'une matrice, et on peut prendre comme A le sous-groupe des matrices diagonales où tous les coefficients sur la diagonale sont positifs.

On en conclut, par compacité de K, que si le groupe de Lie G agit sur une variété avec croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées, cela se manifeste déjà pour l'action restreinte au sous-groupe abélien A, et on peut donc reformuler cette propriété en disant que les fonctionnelles de Lyapunov s'annulent sur A.

Ce raisonnement marche bien si l'on est en train de considérer une action du groupe de Lie G, mais il n'est pas si évident si l'on travaille avec une action du réseau Γ. On a recourt alors à une astuce, analogue à l'interprétation de Zimmer du théorème de superrigidité de Margulis en termes de cocycles (voir la fin de la 5). Si $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ est une action du réseau, on considère la *suspension* M^ρ définie par

$$M^\rho = G \times M/_{(g,x)\sim(g\gamma,\rho(\gamma^{-1})(x))} \quad (\gamma \in \Gamma).$$

La suspension M^ρ définit une variété (compacte lorsque $\Gamma \leqslant G$ est un réseau cocompact), qui est un fibré sur le quotient G/Γ avec fibre M. Le groupe G agit naturellement sur M^ρ par multiplication à gauche sur le premier facteur. Il s'agit d'une manière naturelle d'« étendre » l'action de Γ au groupe G. Le comportement asymptotique des dérivées pour l'action de Γ est équivalent au comportement asymptotique des dérivées de l'action de G *le long des fibres* (cela définit bien un cocycle). On peut résumer la discussion de cette partie ainsi :

Proposition 1. *Si l'action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ n'a pas une croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées, il existe alors une mesure de probabilité μ' sur la suspension M^ρ, A-invariante et ergodique, avec une fonctionnelle de Lyapunov* le long des fibres $\lambda^F_{i',\mu'} : A \to \mathbb{R}$ *non-triviale.*

10. Rigidité de la mesure

Si la mesure de probabilité μ' sur M^ρ donnée par la Proposition 1 était aussi invariante par tout le groupe de Lie G, on trouverait alors une contradiction par le théorème de superrigidité de Zimmer (théorème 4) : comme nous l'avons expliqué à la fin de la section 5, on obtiendrait alors que Γ préserve une « métrique mesurable », et donc tout exposant de Lyapunov pour un élément de Γ doit être nul (car la dérivée $D_x\rho(\gamma)$ est presque partout de norme unitaire).

Le travail se focalise alors sur la recherche d'invariance additionnelle pour une telle mesure μ'. Une première invariance supplémentaire est obtenue par des techniques de dynamique sur les espaces homogènes, notamment des méthodes de moyennisation développées par Ratner et Shah dans l'étude de flots unipotents (on conseille vivement le texte de Witte Morris [27] pour une introduction au sujet). Cela s'avère assez technique, surtout que plusieurs moyennisations sont nécessaires. La propriété de semi-continuité supérieure des exposants de Lyapunov permet de garder toujours un exposant non-trivial. Le résultat obtenu stipule que l'on peut trouver une mesure comme dans l'énoncé de la Proposition 1, qui est envoyée sur la mesure de Haar par la projection $M^\rho \to G/\Gamma$:

Proposition 2. *Si l'action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ n'a pas une croissance uniformément sous-exponentielle des dérivées, il existe alors une mesure de probabilité μ sur la suspension M^ρ, A-invariante et ergodique, avec une fonctionnelle de Lyapunov* le long des fibres $\lambda^F_{i,\mu} : A \to \mathbb{R}$ *non-triviale, et telle que la projection sur G/Γ est la mesure de Haar.*

La suite de la preuve est fortement inspirée par l'article magistral de Brown, Rodriguez Hertz, et Wang [7], où ils revisitent le théorème du sous-groupe distingué de Margulis avec une approche entièrement dynamique. Ils introduisent la notion de *résonance* entre les *racines* de G et les fonctionnelles de Lyapunov le long des fibres.

Rappelons que les racines constituent la base pour la classification des groupes de Lie semi-simples, dont la structure est synthétisée par les célèbres *diagrammes de Dynkin*. La représentation adjointe de $\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$ sur $\mathfrak{g}$ est diagonalisable. Les valeurs propres de cette action définissent des fonctionnelles linéaires $\beta : A \to \mathbb{R}$. Une racine (restreinte) est une telle fonctionnelle β non-nulle.

Exemple 9. Dans le cas $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, si $A \leqslant G$ est le sous-groupe des matrices diagonales dont tous les coefficients sur la diagonale sont positifs, chaque racine est définie par le logarithme du rapport de deux coefficients diagonaux distincts.

D'un point de vue des systèmes dynamiques, un système de racines correspond aux fonctionnelles de Lyapunov non-nulles $\beta : A \to \mathbb{R}$ pour l'action du sous-groupe A sur G/Γ. On dit que deux racines sont *résonnantes* si elles sont positivement proportionnelles, et on note par $[\beta]$ la classe de résonance d'une racine β. À chaque classe de résonance $[\beta]$ on associe un sous-groupe nilpotent $G^{[\beta]}$ qui est l'image par l'application exponentielle des la somme de sous-espaces propres

$$\mathfrak{g}^{[\beta]} = \bigoplus_{\beta \in [\beta]} \mathfrak{g}^\beta.$$

Le groupe G est engendré par un nombre fini de tels sous-groupes $G^{[\beta]}$. La notion de résonance s'étend bien évidemment aux fonctionnelles de Lyapunov d'un cocycle.

Théorème 8 (Brown, Rodriguez Hertz, et Wang). *Soit μ une mesure de probabilité sur la suspension M^ρ, A-invariante et ergodique telles que la projection sur G/Γ est la mesure de Haar et soit β une racine. Si aucune fonctionnelle de Lyapunov le long des fibres $\lambda^F_{i,\mu} : A \to \mathbb{R}$ est résonnante à β, alors la mesure μ est $G^{[\beta]}$-invariante.*

Il suffit alors de trouver suffisamment de fonctionnelles de Lyapunov non-résonnantes pour obtenir l'invariance par tout le groupe G et terminer.

Le théorème 8 est un résultat de théorie ergodique différentiable. Un concept important dans ce cadre est exprimé par l'*entropie métrique* $h_\mu(f)$ d'une mesure de probabilité μ invariante par un difféomorphisme f, dont la définition reprend la notion d'entropie classique en théorie de l'information, mais considérée par rapport à des partitions définies par la dynamique de f. Une formule remarquable établie par Ledrappier et Young, met en relation l'entropie métrique de la mesure avec les exposants de Lyapunov : lorsque μ est f-invariante et ergodique, on a l'*l'inégalité de Margulis–Ruelle*

$$h_\mu(f) \leqslant \sum_{\lambda_i>0} \lambda_i \dim E^i,$$

avec égalité si et seulement si μ est une *mesure SRB* (d'après Sinai–Bowen–Ruelle), c'est-à-dire si les mesures conditionnelles le long des variétés instables de f sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. En général, le fait que la mesure soit SRB permet d'obtenir de l'invariance additionnelle. D'un autre coté, la *formule de Abramov–Rokhlin* permet de comprendre le comportement de l'entropie métrique par rapport aux quotients. Dans un travail précédent, Brown, Rodriguez Hertz, et Wang avaient généralisé cette formule de Abramov–Rokhlin au cas d'une action du groupe abélien A. Ils obtiennent que l'entropie métrique – ici il faut rajouter le terme « conditionnelle », et cela dépend notamment du choix d'une racine de G – est égale à la somme d'une entropie métrique conditionnelle provenant de la mesure de Haar sur la base G/Γ, et d'une entropie conditionnelle le long des fibres. L'hypothèse de non-résonance implique que l'entropie métrique est maximale et le théorème de Ledrappier et Young donne l'invariance souhaitée. Le travail de Brown, Rodriguez Hertz, et Wang est très profond et technique, et nous n'en dirons pas plus ici. Nous conseillons au lecteur intéressé de consulter le texte [2] pour une introduction à ces techniques de rigidité de la mesure.

Références

[1] Y. Benoist. *Réseaux des groupes de Lie*. URL : `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~benoist/prepubli/08m2p6ch1a13.pdf`.

[2] A. Brown. *Entropy, Lyapunov exponents, and rigidity of group actions. Based on the workshop for young researchers: groups acting on manifolds, Teresópolis, Brazil, June 2016. With appendices by D. Malicet, D. Obata, B. Santiago, M. Triestino, S. Alvarez and M. Roldán*. Sous la dir. de M. Triestino. **33**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2019, p. 197.

[3] A. Brown, D. Damjanovic et Z. Zhang. *C^1 actions on manifolds by lattices in Lie groups*. 2019. arXiv : 1801.04009 [math.DS].

[4] A. Brown, D. Fisher et S. Hurtado. « Arbeitsgemeinschaft: Zimmer's Conjecture ». *Oberwolfach Rep.* **16**, nº 4 (2019), p. 2951-3052.

[5] A. Brown, D. Fisher et S. Hurtado. « Zimmer's conjecture for actions of $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$ ». *Invent. Math.* **221**, nº 3 (2020), p. 1001-1060.

[6] A. Brown, D. Fisher et S. Hurtado. *Zimmer's conjecture: Subexponential growth, measure rigidity, and strong property (T)*. 2020. arXiv : 1608.04995 [math.DS].

[7] A. Brown, F. R. Hertz et Z. Wang. *Invariant measures and measurable projective factors for actions of higher-rank lattices on manifolds*. 2017. arXiv : 1609.05565 [math.DS].

[8] D. Calegari. « Real places and torus bundles ». *Geom. Dedicata* **118** (2006), p. 209-227.

[9] S. Cantat. « Progrès récents concernant le programme de Zimmer ». Séminaire Bourbaki. Vol. 2017–2018. Exposés 1136. 2017.

[10] S. Cantat et J. Xie. « Algebraic actions of discrete groups: the p-adic method ». *Acta Math.* **220**, nº 2 (2018), p. 239-295.

[11] B. Deroin et S. Hurtado. *Non left-orderability of lattices in higher rank semi-simple Lie groups*. 2020. arXiv : 2008.10687 [math.GR].

[12] B. Farb et P. Shalen. « Real-analytic actions of lattices ». *Invent. Math.* **135**, nº 2 (1999), p. 273-296.

[13] B. Farb et D. Fisher, éd. *Geometry, rigidity, and group actions*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2011, p. xii+646.

[14] D. Fisher. « Recent Developments in the Zimmer Program ». *Notices of the AMS* **67** (avr. 2020), p. 492-499.

[15] É. Ghys. « Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité ». *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **24**, nº 2 (1993), p. 137-178.

[16] M. Gromov. « Rigid transformations groups ». In : *Géométrie différentielle (Paris, 1986)*. Vol. 33. Travaux en Cours. Hermann, Paris, 1988, p. 65-139.

[17] T. Hawkins. *Emergence of the theory of Lie groups*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. An essay in the history of mathematics 1869–1926. Springer-Verlag, New York, 2000, p. xiv+564.

[18] S. Hurtado, A. Kocsard et F. Rodriguez Hertz. « The Burnside problem for $\mathrm{Diff}_\omega(\mathbb{S}^2)$ ». *Duke Math. J.* **169**, nº 17 (2020), p. 3261-3290.

[19] H. Lee. *Remarks on global rigidity of higher rank lattice actions*. 2020. arXiv : `2010.11874 [math.DS]`.

[20] K. Mann. « The structure of homeomorphism and diffeomorphism groups ». *Notices of the AMS* (2021). À paraître.

[21] V. Pecastaing. « Conformal actions of higher rank lattices on compact pseudo-Riemannian manifolds ». *Geom. Funct. Anal.* **30**, nº 3 (2020), p. 955-987.

[22] V. Pecastaing. *Projective and conformal closed manifolds with a higher-rank lattice action*. 2020. arXiv : `1910.06199 [math.DG]`.

[23] M. de la Salle. « Strong property (T) for higher-rank lattices ». *Acta Math.* **223**, nº 1 (2019), p. 151-193.

[24] G. Stuck. « Low-dimensional actions of semisimple groups ». *Israel J. Math.* **76**, nº 1-2 (1991), p. 27-71.

[25] D. Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, 2015, p. xii+475.

[26] D. Witte Morris. « Quasi-isometric bounded generation by $\mathbb{Q}$-rank-one subgroups ». *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **16** (2020), Paper No. 012, 17.

[27] D. Witte Morris. *Ratner's theorems on unipotent flows*. Chicago Lectures in Mathematics. Chicago, IL : University of Chicago Press, 2005, p. xii+203.

[28] Z. Zhang. *Zimmer's conjecture for lattice actions: the* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$*-case*. 2018. arXiv : `1809.06224 [math.DS]`.

[29] R. J. Zimmer. « Actions of semisimple groups and discrete subgroups ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 1247-1258.

[30] R. J. Zimmer. *Group actions in ergodic theory, geometry, and topology. Selected papers. With a foreword by David Fisher, Alexander Lubotzky, and Gregory Margulis*. Sous la dir. de D. Fisher. Chicago, IL: The University of Chicago Press, 2020, p. 685-709.

Michele Triestino

Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université Bourgogne Franche-Comté, CNRS UMR 5584,
9 av. Alain Savary, 21000 Dijon, France

michele.triestino@u-bourgogne.fr

http://mtriestino.perso.math.cnrs.fr/

L'auteur est maître de conférences à l'Université de Bourgogne. Il s'intéresse aux actions de groupes sur les variétés, et plus en général aux systèmes dynamiques et à la théorie géométrique des groupes.

L'auteur tient à remercier Serge Cantat, Bertrand Deroin, et Vincent Pecastaing pour des remarques précieuses, Kathryn Mann pour son aide, Marielle Simon pour sa relecture attentive, ainsi que Romain Tessera pour l'encouragement à rédiger cette note.